2019 年度 線形代数学 I（火曜 1 限，生物学コース・物質循環学コース）

担当：境 圭一

1. 講義の内容，成績など．

(1) 必修科目です．ベクトルや行列の基本的な扱い，連立 1 次方程式への応用などを学びます．

(2) 教科書は「基礎理学 線形代数学」（数学教科書編集委員会編，学術図書出版社）です．生協で購入できます．第 1 章〜第 3 章の内容を扱います．

(3) 成績は，中間試験と期末試験，ならびにレポートの状況により判定します．中間試験を 40 点満点，期末試験を 60 点満点で実施します．単位取得のためには，中間試験と期末試験の両方を受験することを必須とします．この他に数回のレポートを課します（20 点程度相当の予定）．中間試験，期末試験，レポートの点数の合計（120 点満点）が 60 点以上の場合に単位を認定し，60〜69 点なら「可」，70〜79 点なら「良」，80〜89 点なら「優」，90 点以上なら「秀」とします．追試などの救済は行いません．

(4) 中間試験は 6/4（火）1 限，期末試験は 8/6（火）1 限の予定です．変更がある場合は追って連絡します．

(5) 出席状況は，成績評価には用いません．

(6) この講義に関する連絡事項は以下の URL に掲載します．
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_linear1/19_linear1.html`

(7) 本来この講義に演習はついていませんが，講義の後半に演習の時間を設けます（15 分程度）．それ以外にも演習問題を上記 URL に随時掲載します．

(8) 講義中であっても遠慮なく質問してください．講義外でも随時受け付けます．研究室（理学部 A 棟 403）にお越しください．あらかじめ `ksakai@math.shinshu-u.ac.jp` 宛に連絡をもらえれば確実です．

2. よく使う記号など．ここに書いたもの以外にもあります．わからないものがあれば，その都度質問してください．

(1)「定義」「命題」など，何度も出てきて画数の多い漢字は，英語（の省略形）で書くことが多々あります．以下に英語（の省略形）を記しておきます．教員によって異なる省略形を使うこともあるので厄介です．

- 「定義」: Definition, Def など．「このように約束する」という内容です．
- 「定理」: Theorem, Thm, Th など．（明らかでない）ある事実が成立する，と主張する内容です（当然，証明が必要です）．
- 「命題」: Proposition, Prop など．定理と同類ですが，定理よりは少し軽い感じで使われます．
- 「補題」: Lemma, Lem など．定理や命題と同類ですが，より重要な定理や命題などに向けた補助的な内容です．中には，結果的に定理より重要になるような，汎用性が極めて高いものもあります．
- 「系」: Corollary, Cor など．定理や命題と同類で，前の定理や命題を使えばすぐに証明できる内容です．
- 「証明」: Proof, Pf など．定理などが成り立つ理由を厳密に示します．
- 「例」: Example, Ex など．抽象的な理論に対する具体例です．
- 「注意」: Remark, Rem, Rmk など．補足したり，間違えやすい点について注意を促す内容です．

(2) $P := Q$ と書いたら，「Q のことを P と書くことにする」という意味です．記号を定義するときに使います．P は新たに導入する記号で，Q には既知の数式が書かれます．例えば

$$f(x) := \sin x \quad \text{や} \quad \mathbf{R} := \{\,\text{実数}\,\}$$

は，それぞれ「$f(x) = \sin x$ とおく」「実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書く」という意味です．

(3) $x \in X$ は「x は集合 X に含まれる」「x は X の元（要素）である」という意味です．例えば $x \in \mathbf{R}$ は「x は実数全体の集合の元である」，要するに「x は実数である」ということです．

(4) $A \overset{\text{def}}{\iff} B$ は「A とは，B であることと定義する」という意味です．例えば次のように使います：

$$\text{数列 } \{a_n\}_{n\geq 1} \text{ が公差 } d \text{ の等差数列である} \overset{\text{def}}{\iff} a_{n+1} - a_n = d \text{ がすべての } n \text{ について成立する}$$

(5) A $\iff$ B と書いたら「A と B は同値である」という意味です．“$\overset{\text{def}}{\iff}$” が定義であるのに対し，こちらは定理や命題の類です：

$$x \in \mathbf{R} \text{ について次が成り立つ：} \quad x = 0 \iff x^2 = 0$$

(6) この講義では，n 項ベクトルは多くの場合に縦ベクトルで表します．どうしても抵抗がある場合は横ベクトルで書いてもいいのですが，次の二つの理由で，縦で書く習慣をつけることをおすすめします．

- 和や内積の計算には縦が便利であること（やってみるとわかる）
- 今後の講義で学ぶ「行列の積」を考える際には縦横の区別が重要であること

記号としては太字 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ などで表します．太字の板書方法は人それぞれなので厄介です．読めないときは質問してください．混同しないのであれば太字にしなくてもよいのですが，たいてい混同するので，がんばって太字を書くようにしたほうが無難です．

n 個の実数の組であるベクトルに対し，単独の実数のことを**スカラー** (scalar) とよび，この講義ではふつうの文字 $a, b, \ldots, k, l, \ldots$ などで書きます．“ l ” は小文字のエルです．板書では “ ℓ ” のようにも書きます．

3. 線形代数学を学ぶ動機．線形代数学 (linear algebra) は，微分・積分学とともに数学すべての基礎をなします．数学以外でも，自然科学に関わるあらゆる分野を学ぶ上で大切なものです．

線形代数学 I で学ぶ内容は，主に連立 1 次方程式に応用されます．与えられた連立 1 次方程式を解くことは，基本的には容易です．しかし，どんな連立 1 次方程式にも通じる一般的な解法を考えるのは，そう簡単ではありません．例えば，未知数を 3 つ含む連立 1 次方程式 (1)〜(3) を考えてみます：

$$(1)\quad \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

これらの差異は第 3 式だけですが，(1) は唯一の解 $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ を持ち，(2) は無数の解 $(x, y, z) = (t, t-2, 2-t)$（ただし t は任意）を持ち，(3) は解を持ちません．解がこのように異なる振る舞いをする理由は，(1)〜(3) を眺めていてもなかなか見えないと思います．

また，大学入試では手で解ける程度の方程式しか出てきませんが，自然界の諸問題はそう親切ではありません．自然界は数限りないデータが複雑に絡み合ってできています．ある現象を 1 次式で近似的に表示できたとしても，それは例えば 1 億個の方程式からなり，1 兆個の未知数を含む連立 1 次方程式かもしれません．それを解くのはもちろん人間には不可能ですから計算機を使うことになるわけですが，膨大なデータを扱うときは，それなりに効率よく計算をさせないと，計算機といえどもすぐに音を上げてしまいます．計算機にやり方を教えるのは基本的には人間ですから，人間が連立 1 次方程式の構造をよく理解していないと，計算機も真価を発揮できません．

線形代数学 I で学ぶ**行列**の概念を使うと，例えば上の (1)〜(3) のような連立 1 次方程式の解の振る舞いは，対応する行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の**階数** (rank) という値により系統立てて説明されます．また (1) の解を求める操作は，A の**逆行列** A^{-1} を求めることと等価であることなどもわかります．

以上のような具体的な動機もありますが，数学を学ぶ目的として最も重要なのは，**物事を筋道立てて考える能力を養うこと**です．大学の数学は抽象的で難しく見えますが，辛抱強く論理を追えば必ず解決に至るようにできています．世の中はそうはできていなくてハードルが高いので，まずは安全にできている数学でトレーニングするわけです．計算も大事ですが，それは計算機に任せてもよいことです．人間が頭を使う部分のほうが大切です．