

$x$  を 4 で割った余り 0, 1, 2, 3 に応じて, それぞれ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですが, 実は  $a, b$  の値を慌てて代入しなくても解けます. (1) については, 直接  $A^2 = AA$  を計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(a+3b) & -3a(a+3b) \\ -b(a+3b) & 3b(a+3b) \end{pmatrix} = (a+3b) \begin{pmatrix} a & -3a \\ -b & 3b \end{pmatrix} = (a+3b)A$$

です. これを繰り返し使えば

$$A^3 = A^2A = ((a+3b)A)A = (a+3b)A^2 = (a+3b)^2A, \quad A^4 = A^3A = (a+3b)^2A^2 = (a+3b)^3A, \quad \dots$$

となり, 一般に  $A^n = (a+3b)^{n-1}A$  であることがわかります. これが (2) の答です. 正確には帰納法により示すべきで, そうしている答案とそうでない答案では評価に差をつけています. 行列の成分を見て具体的に積を計算する必要はありません (しないほうが計算間違いの危険が少ない).

実は一般に,  $2 \times 2$  行列  $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  は

$$X^2 - (p+s)X + (ps-qr)E_2 = O \quad (*)$$

をみます. (\*) は **Cayley-Hamilton** の定理とよばれる定理の特別な場合です. (\*) 自体は計算してみればすぐに確かめられるので, やってみるといいでしょう. 今回の  $A$  の場合,  $p+s = a+3b$ ,  $ps-qr = 3ab-3ab = 0$  なので, (\*) は  $A^2 - (a+3b)A = O$  となっています.

なお, (\*) に登場した  $p+s$  は  $X$  の跡 (trace),  $ps-qr$  は  $X$  の行列式 (determinant) とよばれ, それぞれ  $\text{tr } X$ ,  $\det X$  と書きます. これらは今後の講義で, もっと一般的な設定で登場します.

今回は採点者が出題者でもあるので, 言葉足らずな答案でも何をしたいのかは推測できてしまいますが, いざ世の中に出たとき, 何も事情を知らない人に説明するための文章では, 読み手に意図を汲んでもらうことを期待してはいけません. 今回の答案にはそれほど込み入った文章は必要ではないと思いますが, 例えば帰納法の途中で

(あまりよくない)  $n = k+1$  のとき成り立つと仮定すると…

のように書くのは感心しません. この例では「何が成り立つか」を読み手の想像に任せているわけです. 今回は誤解の可能性が低いとしても, いくつか重大な行き違いを招くかもしれません. 丁寧に

(よい)  $n = k+1$  のとき  $A^n = (a+3b)^{n-1}A$  が成り立つと仮定すると…

と書くべきでしょう. 「 $A^n = (a+3b)^{n-1}A$  が」の部分が出たら, 何か番号を振っておいて, 番号で参照するのも手でしょう.

繰り返しますが, しっかり説明しようという意図が伝わらない文章は「意味がわからない」と切り捨てられておしまいです. 例えば就職活動などをするとき急にがんばろうと思っても, 日頃から訓練していなければ無理です. この講義に限らず, レポートは文章を書く力を鍛える貴重な機会ですから, しっかり考えて書くべきです. 他人のレポートの丸写しは, 貴重な機会を無にしているだけでなく, 採点者から見れば丸写しであることは一目瞭然ですから, 極めて悪い心証を与えます. ただし, 友人や教員と解き方を議論することはむしろ推奨されることです. そのあたりの線引きは難しく, 採点する側としては悩ましいところです. 議論して解決方法がわかったら, レポートにまとめる段階では各自の責任で文章を考える, というふうにしてもらいたいと思います.

単に○と書いてあれば 10 点で, 減点されている場合は右下あたりに点数が書いてあります.

その他, 細かい注意を述べておきます.

- 行列  $A$  のスカラー倍は “ $rA$ ” のようにスカラーを前に書くのが普通です. “ $Ar$ ” のようには (あまり) 書きません. ベクトル  $\mathbf{x}$  のスカラー倍を  $r\mathbf{x}$  と書き, “ $\mathbf{x}r$ ” とは書かないのと同じです.
- 行列の積について, 講義では慣れるために 「(1,1) 成分は~, (1,2) 成分は~, …」 のような説明もしましたが, 慣れてくれば, そこまで詳細に書く必要もないと思います.
- 行列の成分間にはコンマを書かないのが普通です. 成分の区切りがよくわかるよう, 十分な空白を空けるようにしてください.