線形代数学 **I**（生物学コース・物質循環学コース）中間試験（**2019** 年 **6** 月 **4** 日）解答・解説

担当：境 圭一

解答.

1. (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\dfrac{\pi}{2}$
2. $a = 1, 3$
3. (1) $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $C^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
4. (1) $\operatorname{rank} P = 3$ (2) $\operatorname{rank} Q = n - 1$
5. $X^n = \begin{pmatrix} na - (n-1) & nb \\ nc & nd - (n-1) \end{pmatrix}$ ($X^n = nX - (n-1)E_2$ なども正解)

解説.

1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角 θ は $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ と $0 \leq \theta \leq \pi$ で定まる．それぞれ $45°, 90°$ でも正解．
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つことと $ad - bc \neq 0$ は同値で，$ad - bc \neq 0$ なら逆行列は $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ だった．ここでは $\det A = a(a-2) - (2a-3) \cdot 1 = a^2 - 4a + 3 = 0$ をみたす a を求めればよい．
3. (1) は前問で述べた通り．(2) は 3×6 行列 $\left(C \,\middle|\, E_3\right)$ を基本変形して左半分が E_3 になったときに右半分に残った行列である．$\dfrac{1}{4}$ が行列の中に入っていても正解（だが，上のように書いたほうが見やすいだろう）．
4. 行基本変形で階段行列に変形したときに残るゼロでない行の数が階数 (rank) だった．Q については，n 行目から k 行目を引く操作を $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について行うと
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$
という階段行列になるので，$\operatorname{rank} Q = n - 1$ である．
5. 条件から $a + d = 2, ad - bc = 1$ である．これらから
$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + (ad-1) & (a+d)b \\ (a+d)c & (ad-1) + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) - 1 & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 1 & 2b \\ 2c & 2d - 1 \end{pmatrix},$$
つまり $X^2 = 2X - E_2$ となる（これは Cayley-Hamilton の定理（演習問題 5 参照）の帰結でもある）．これを使うと $X^n = nX - (n-1)E_2 \cdots (*)$ であることが帰納的に確かめられる：$n = 1, 2$ のときは既に示されており，$n = k$ までで $(*)$ が正しいことが示されているとすると
$$X^{k+1} = XX^k = X(kX - (k-1)E_2) = kX^2 - (k-1)X = k(2X - E_2) - (k-1)X = (k+1)X - kE_2$$
となるから，$n = k + 1$ でも $(*)$ が正しいことになる．

問題 4 (1) までは慎重に計算すればできるはずだし，また問題 3 は検算もできるので，確実にできてほしい．問題 4 (2) と問題 5 は少し大変かもしれないが，問題 4 (2) は $n = 2, 3$ あたりで実験してみればわかりやすいし，問題 5 はレポート問題 1 を思い出すと手がかりが見えてくるかもしれない．

配点：5 + 5,　5,　5 + 5,　5 + 5,　5 （各小問につき 5 点，40 点満点）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_linear1/19_linear1.html`