注意． 答案用紙には答のみ記入すること．途中経過が書かれていて誤りを含む場合は減点対象になり得るので注意すること．ベクトルを書く場合，縦横はどちらでもよい．

1. 次の 4 文字の置換 σ_k $(k = 1, 2)$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_k)$ を求めよ．
   (1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   (2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を 2 辺とする平行 4 辺形の面積を求めよ．
   (2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．
   (3) (2) の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよ．

3. 次の行列 B, C が逆行列を持つ場合はそれを求めよ．持たない場合は「なし」と答えよ．
   (1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (2) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 次の行列 P_k, Q_k, R_k $(k = 1, 2)$ に対し，$\det(P_k Q_k R_k)$ を求めよ．
   (1) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 2 & -4 \\ 10 & 2 & 1 & -2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 10 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (2) $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 23 & -7 & -12 & -11 \\ -15 & 37 & 31 & 100 \\ 32 & -9 & 24 & 14 \\ 10 & 15 & 29 & 41 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

5. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2k-1 & 3k+1 & 4k-3 \\ k^2 & (2k-1)^2 & (3k+1)^2 & (4k-3)^2 \\ k^3 & (2k-1)^3 & (3k+1)^3 & (4k-3)^3 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような k をすべて求めよ．

6. $a, b, c \in \mathbf{R}$ を定数とし，自然数 n に対し，n 次正方行列 Y_n を次のように定める：$Y_n = \begin{pmatrix} y_{ij} \end{pmatrix}_{1 \le i, j \le n}$ とおくとき

$$y_{ii} = a \quad (1 \le i \le n); \qquad y_{i\,i+1} = b, \quad y_{i+1\,i} = c \quad (1 \le i \le n-1); \qquad y_{ij} = 0 \quad (|i-j| \ge 2).$$

   例えば $Y_1 = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$ である．$z_n = \det Y_n$ とおく．
   (1) $n = 1, 2, \ldots$ に対し $z_{n+2} = p z_{n+1} + q z_n$ となる定数 p, q を a, b, c を用いて表せ．
   (2) $a = 5, b = 2, c = 3$ のとき，z_n を求めよ．

配点：10, 15, 10, 10, 5, 10（各小問につき 5 点，60 点満点）