線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）期末試験（2019 年 8 月 6 日）解答・解説

担当：境 圭一

解答.

1. (1) $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = 1$ (2) $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = -1$

2. (1) $\sqrt{10} - \pi$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) 4

3. (1) $B^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (2) なし

4. (1) -2 (2) 0

5. $k = -2, -1, -\dfrac{1}{2}, 1, 4$

6. (1) $p = a,\quad q = -bc$ (2) $z_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

解説.

1. $\sigma_1 = \tau_{23}\tau_{12}$ だから符号は $+1$. $\sigma_2 = \tau_{34}\tau_{13}\tau_{24}$ だから符号は -1.
2. (1) は $\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\right|$ に等しい．面積は正の値だから絶対値が必要である．$(3.15)^2 = 9.9225$ より $\pi < \sqrt{10}$ がわかるから，答は $\sqrt{10} - \pi$ となる．(3) は (1) と同様に $\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\right|$ を計算してもよいが，中身の行列式が $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}$ に等しいことを知っていれば簡単.
3. $\det B = -16$ だから B^{-1} は存在する．実際に計算するには，余因子行列を求めるよりは中間試験の前にやった方法のほうが効率がいい．$\det C = 0$ だから C^{-1} は存在しない.
4. 行列の積 $P_kQ_kR_k$ を求めてから det を計算してもよいし，$\det P_k \det Q_k \det R_k$ を計算してもよい．(1) はどちらでも大差ないが，(2) は後者のようにしないと大変だろう．$P_1Q_1R_1$ は R_1 の行基本変形になっていて，結果は行列式を計算しやすい形になっている．(2) は $\det P_2 = 0$ を求めてしまえば，Q_2, R_2 については計算する必要がない.
5. $\det X = 0$ となる k を求めればよい．一般に $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & q & r & s \\ p^2 & q^2 & r^2 & s^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 & s^3 \end{pmatrix} = (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r)$ が比較的容易にわかる．右辺は p, q, r, s のうち 2 つを取るすべての組み合わせについて差を取り掛けたものである．よって，$p = k, q = 2k-1, r = 3k+1, s = 4k-3$ のうち少なくとも 2 つが等しくなるような k が求めるものである.
   なお，この問題の行列を n 次正方行列に一般化することも容易で，$p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{R}$ に対し，(i, j) 成分が p_j^{i-1} である n 次正方行列の行列式は
   $$\det\left(p_j^{i-1}\right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (p_j - p_i)$$
   である．これを van der Monde の行列式という．（右辺の $\prod$ は積を取る記号である）
6. p, q が n によらない定数であることが問題文に明記されているので，答を求めるだけなら，$\det Y_3$ をいずれかの行または列で余因子展開すれば十分．もちろん正確には $\det Y_{n+2}$ を余因子展開する必要があるが，やることは全く同じである．(2) は $z_1 = 5, z_2 = 19, z_{n+2} = 5z_{n+1} - 6z_n$ で定まる数列の一般項を求める問題である.

いずれも慎重に計算すれば問題なくできるはずである．なお問題 6 は，村山光孝先生の「工学のための線形代数（サイエンス社）」の例 3. 20 を参考にさせていただきました.

配点：10, 15, 10, 10, 5, 10（各小問につき 5 点，60 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_linear1/19_linear1.html