2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 1

担当：境 圭一

以下，$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする．

1. $\mathbf{K}$ の元を成分とする n 項ベクトル全体の集合 $\mathbf{K}^n$ は，n 項ベクトルの成分ごとの和とスカラー倍（今まで慣れ親しんだもの）によって $\mathbf{K}$ ベクトル空間になることを示せ．つまり，n 項ベクトルの和とスカラー倍は，講義でやった定義 1.2 の (I), (II) をすべてみたすことを示せ．
2. （教科書の問 4.1.3 参照）V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする．
   (1) ゼロベクトル $\mathbf{0} \in V$ はただ 1 つに定まることを示せ．つまり，もし $\mathbf{0}, \mathbf{0}' \in V$ がともにゼロベクトルの性質（定義 1.2 の (I) (3) 参照）をみたすならば $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ であることを示せ．
   (2) 各 $\boldsymbol{u} \in V$ を 0 倍して得られる $0\boldsymbol{u} \in V$ はゼロベクトル $\mathbf{0}$ であることを示せ．
   (3) 各 $\boldsymbol{u} \in V$ に対し，その逆元 $-\boldsymbol{u} \in V$ はただ 1 つに定まることを示せ．
   (4) 各 $\boldsymbol{u} \in V$ を -1 倍して得られる $(-1)\boldsymbol{u} \in V$ は $\boldsymbol{u}$ の逆元 $-\boldsymbol{u}$ であることを示せ．
3. 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}^n$ の生成系であることを示せ．
4. （教科書の例 4.1.1 (3) 参照）$\mathbf{K}$ の元を係数とする x の多項式全体の集合を $\mathbf{K}[x]$ と表す．例えば $1 + 2x - 3x^2 \in \mathbf{R}[x]$, $\sqrt{-1} - 2x + \left(3 + \sqrt{-1}\right)x^2 \in \mathbf{C}[x]$ である．
   (1) 通常の多項式の和とスカラー場

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots, \\ r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) &= ra_0 + ra_1x + ra_2x^2 + \cdots\end{aligned}$$

   によって，$\mathbf{K}[x]$ は $\mathbf{K}$ ベクトル空間となることを示せ．
   (2) n 次以下の多項式全体の集合を $\mathbf{K}_{\leq n}[x]$ と表す．$\mathbf{K}_{\leq n}[x]$ は $\mathbf{K}$ ベクトル空間であることを示せ．
   (3) $\mathbf{K}[x], \mathbf{K}_{\leq n}[x]$ の生成系を 1 つずつ求めよ．
   (4) 次数がちょうど n の多項式全体の集合を $\mathbf{K}_n[x]$ と表す．$\mathbf{K}_n[x]$ は $\mathbf{K}$ ベクトル空間か？

補足.

(i) 問題 1 にあるように，ベクトル空間とは，$\mathbf{K}^n$ の性質を座標によらない形で抽象化したものです．問題 1 は真面目にやるとけっこう大変ですが，**抽象的な定義を，具体的な例を題材にして確認してみる**，というのが理解への近道だと思います．

(ii) 問題 2 の内容は，$V = \mathbf{K}^n$ であれば当たり前で，ゼロベクトルは $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ しかないし，どんな $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ も 0 倍すれば $\mathbf{0}$ ですし，$\boldsymbol{u}$ の逆元 $-\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{u}$ の -1 倍です．しかし問題 4 で見るように，ベクトル空間は $\mathbf{K}^n$ 以外にも存在します．それら一般のベクトル空間の場合には，問題 2 の内容は確認を要します．教科書の略解はかなり略してあるので，**時間をかけて**よく考える必要があると思います．

(iii) ベクトル空間の例としては，いつも $V = \mathbf{K}^n$ を念頭に置いていればいいのですが，問題 4 のように，ベクトル空間の例はそれだけにはとどまりません．$\mathbf{K}[x]$ や $\mathbf{K}_{\leq n}[x]$ をベクトル空間とみなすときは，その元 $1 + x - 2x^2$ などを「ベクトル」とよぶわけです．$\mathbf{K}^n$ を念頭に置きながらも，実はより広い対象を扱っているわけです．
特に $\mathbf{K}[x]$ の生成系に含まれるベクトルの数に注目してください．問題 3 で見るように，$\mathbf{K}^n$ なら n 個のベクトルで事足りますが，$\mathbf{K}[x]$ ではいくつの「ベクトル」（多項式）で生成されるでしょうか？