

※スペース節約のため、ベクトルを横に書きます。縦で書き直した方が計算しやすいと思います。

- 次の \mathbf{R}^3 のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ。
 - $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$
 - $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$
 - $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, -1, -2)$
- (教科書 p. 105, 命題 4.7 参照). $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 4)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, -4, 8) \in \mathbf{R}^4$ とおく.
 - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ.
 - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は 1 次従属であることを示せ.
 - \mathbf{v}_4 を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の 1 次結合で表せ. その表し方はただ一通りであることを示せ.
- $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3)$, $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -1) \in \mathbf{R}^2$ とおく.
 - $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は \mathbf{R}^2 の基底であることを示せ. また $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ も \mathbf{R}^2 の基底であることを示せ.
 - $\mathbf{v}_j = a_{1,j}\mathbf{u}_1 + a_{2,j}\mathbf{u}_2$ となる $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ ($i, j = 1, 2$) を求めよ.
 - $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ とおく. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を縦ベクトルに書き換えたとき, 2×2 行列の等式 $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)A$ を確認せよ.
 - A は正則であることを示せ.
 - $\mathbf{u}_j = b_{1,j}\mathbf{v}_1 + b_{2,j}\mathbf{v}_2$ ($j = 1, 2$) となる $b_{i,j} \in \mathbf{R}$ を求めよ. これらと A^{-1} の関係を考察せよ.
- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または \mathbf{C} とする. \mathbf{K}^n の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{K}^n の基底であることを示せ (下の補足参照).
- V を \mathbf{K} ベクトル空間とする. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ が 1 次独立であるとき, $i = 1, \dots, k$ に対し $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ であることを示せ. (ヒント: 対偶を考え, ある $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ なら $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ が 1 次従属であることを示すとよい)

補足.

- (i) ベクトル空間 V の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が与えられたとします (講義の定義 3.5 参照). このとき, すべての $\mathbf{x} \in V$ は $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{v}_i = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_n \mathbf{v}_n$ ($r_1, \dots, r_n \in \mathbf{K}$) の形に一意的に表せるのでした (講義の補題 3.7 参照). よってこの \mathbf{x} は, n 個のスカラールの組 (r_1, \dots, r_n) で完全に特定されることとなります. この組 (r_1, \dots, r_n) を, 基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する \mathbf{x} の成分と呼びます.

$V = \mathbf{K}^n$ の場合を考えてみます. 次の (1), (2) より, 基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{K}^n の基底です:

(1) $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ と仮定すると 左辺 $= (r_1, \dots, r_n) = \mathbf{0}$ だから, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は 1 次独立

(2) \mathbf{K}^n のすべてのベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ は $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ の形に表せる

(2) より, 基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ に関する \mathbf{x} の成分とは, $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ の座標に他なりません. 逆に言うと, 一般のベクトル空間 V の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ に関する $\mathbf{x} \in V$ の成分とは, \mathbf{K}^n の「座標」を抽象化した概念です. ベクトル空間は \mathbf{K}^n の性質 (和・スカラール倍) を座標によらない形で抽象化したものでしたが, 基底を 1 つ選べば, それに関する「座標」が 1 つ定まることとなります. ベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の 1 次独立性は, 各 $\mathbf{x} \in V$ の「座標」がただ 1 通りに定まることを保証する性質だということがわかります.

- (ii) V の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ を 1 つ取り固定します. このとき, この基底に関する $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ の成分がそれぞれ (a_1, \dots, a_n) , (b_1, \dots, b_n) だとすると, $r, s \in \mathbf{K}$ に対し, この基底に関する $r\mathbf{x} + s\mathbf{y}$ の成分は $(ra_1 + sb_1, \dots, ra_n + sb_n)$ となるのがすぐにわかります (確かめてください). つまり, 基底を 1 つ固定し, 各ベクトルを基底に関する成分で表すことにすると, V の和やスカラール倍は \mathbf{K}^n のそれらと全く同一になります. この意味で, 基底を 1 つ固定すると, V は \mathbf{K}^n と「同一視」されます. 詳しい意味は講義の後半でお話しします.
- (iii) ベクトル空間 V の基底の取り方は一般に一意的ではありません. 例えば今回の問題 3 で見るように, \mathbf{K}^n の基底となるベクトルの組は基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ の他にもあります. 特別な理由がない限り「最も標準的な基底」

というものはなく、どの基底にも優劣はありません。「座標」の取り方はいろいろあり、それらの間に優劣はない、ということです。

(iv) 1次独立性を理解するには、逆に1次従属性を理解するのも1つの手です。「1次独立でない」ということを言い換えると次のようになります：

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ が 1 次従属} \iff \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \text{ かつ } (r_1, \dots, r_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ となる } r_1, \dots, r_n \in \mathbf{K} \text{ が存在する}$$

例えば $n=3$ で $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ …(*) となっているとき、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は1次従属です。このとき $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$ となり、 \mathbf{v}_1 は $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を使って表せてしまいますから、以降 \mathbf{v}_1 は全く使わなくてよいことになります。このように「1次従属な組にはムダがある」ということができます。(*)のように互いを決めるような関係がなく、それぞれが独立したベクトルになっているような組が「1次独立なベクトル」ということになります。