2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 4

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は別途出題しています．

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次のベクトルの組は $\mathbf{R}^4$ の基底か？
   (1) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,1)$
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,-1,0)$
   (3) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-2,4,-8)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,3,9,27)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,-4,16,-64)$

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．
   (1) $i = 1,2,3$ に対し，$\operatorname{rank} A_i$ を求めよ．
   (2) $V_i := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A_i\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V_i は $\mathbf{R}$ ベクトル空間であることを示せ．（教科書 p. 99, 例 4.1.5 (4) 参照）
   (3) $\dim V_i$ を求めよ．

3. $\boldsymbol{v}_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,\ 4,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,\ 3,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{v}_4 = (-1,\ 0,\ -1,\ -2) \in \mathbf{R}^4$ とし，$W_1 := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $W_2 := \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle \subset \mathbf{R}^4$ とおく．
   (1) $\dim W_1, \dim W_2$ を求めよ．
   (2) $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．
   (3) $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ．

補足．

(i) ベクトル空間 V の**次元** $\dim V$ とは，V の基底がいくつのベクトルの組からなるか，という数ですが，講義の系 4.7 より，どれくらいたくさんのベクトルが V の中で 1 次独立になれるか，という値でもあります．感覚的には，空間の「広さ」のようなものを表す値です．一般に $\dim \mathbf{K}^n = n$ であることを見ましたから，例えば数直線で表される $\mathbf{R}^1$ の次元は 1, xy 平面で表される $\mathbf{R}^2$ の次元は 2, xyz 空間で表される $\mathbf{R}^3$ の次元は 3, といった具合に，日常的な意味での「次元」と合う概念です．

(ii) 上で述べたように $n = \dim V$ は V の 1 次独立なベクトルの最大個数ですが，その最大個数からなる 1 次独立な $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ は必ず基底になります（講義の命題 4.6, 系 4.7）．問題 1 は $V = \mathbf{R}^4$ の場合で，$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ であることはわかっていますから，1 次独立なベクトルの最大個数は 4 です．よって $\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は，1 次独立であれば基底であり，1 次独立でなければ基底ではないことになります．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ を縦ベクトルに書き直して $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}$ という 4×4 行列を考えると，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立 $\iff \operatorname{rank} A = 4 \iff \det A \neq 0$ です．

(iii) 講義の補題 4.1 を証明するときに使った

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} C \quad \cdots \quad (*)$$

（教科書 p. 108 も参照）という書き方は誤解を招くかもしれません．$C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ のとき，$(*)$ の右辺は

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{k1}\boldsymbol{b}_k & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{k2}\boldsymbol{b}_k & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{kn}\boldsymbol{b}_k \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (**)$$

を略記したものです．つまり $(*)$ は，n 個の等式 $\boldsymbol{a}_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{kj}\boldsymbol{b}_k$ $(j = 1, \ldots, n)$ をまとめて略記したものです．気持ちとしては，各 $\boldsymbol{b}_k$ をあたかも単独のスカラーのように考えて，$(*)$ の右辺を「$1 \times m$ 行列」と $m \times n$ 行列の積のようにみなして計算すれば $(**)$ になる，ということです．

考えているベクトル空間が $V = \mathbf{K}^n$ で，各 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j$ が縦ベクトルで書かれていれば，等式 $(*)$ は行列の間の等式として意味があります．つまり $(*)$ の右辺の行列の積を計算すれば，行列 $(**)$ に一致します．演習問題 3 の問題 3 も参照してください．

(iv) この講義に出てくるベクトル空間 V は，有限個からなる基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ $(n = \dim V)$ を持つと仮定します．そうでないベクトル空間の例としては，x の多項式全体からなるベクトル空間 $\mathbf{K}[x]$ があります（演習問題 1-3 参照）．任意に選んだ有限個の「ベクトル」$f_1, \ldots, f_k \in \mathbf{K}[x]$（各 f_i は x の多項式）に対し，$f_1, \ldots, f_k$ の次数の最大値を m とするとき，例えば $x^{m+1} \in \mathbf{K}[x]$ は $r_1 f_1 + \cdots + r_k f_k$ $(r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{K})$ の形には決して表せませんから（次数を考えればわかる），$f_1, \ldots, f_k$ は基底の定義 3.5 の (2) をみたしません．よって有限個のベクトルは決して $\mathbf{K}[x]$ の基底にはなり得ません．無限個のベクトルの組 $1, x, x^2, \ldots$ は「基底」とよぶべきものではありますが，無限個のベクトルの 1 次独立性は微妙な問題を含みます（無限和 $r_0 \cdot 1 + r_1 \cdot x + r_2 \cdot x^2 + \cdots$ の意味が定かでない）．「無限次元ベクトル空間」は慎重に扱わないといけません．もっとも，上で述べたように，この講義ではそのようなベクトル空間は扱いません．