**2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 6**

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

以下，特に断らなければ $\mathbf{R}^n$ 上には Euclid 内積を考えるものとする．

1. 次のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ は 1 次独立であることを示せ．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots$ を求めよ．
   (1) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2), \boldsymbol{v}_2 = (1, -1) \in \mathbf{R}^2$
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0), \boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1) \in \mathbf{R}^3$
   (3) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 2), \boldsymbol{v}_2 = (1, 3, 4), \boldsymbol{v}_3 = (0, 2, -1) \in \mathbf{R}^3$
   (4) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, 2), \boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1, 3), \boldsymbol{v}_3 = (1, 3, 1, 0), \boldsymbol{v}_4 = (-4, 0, 2, 1) \in \mathbf{R}^4$
2. $\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ が次をみたすことを示せ．
   (1) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$. また $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
   (2) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
   (3) $\boldsymbol{u} \cdot (r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}) = r\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + s\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
   また (2), (3) を用いて $(r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = r\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + s\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ も成り立つことを示せ．
3. $V$ を内積空間とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ （**三角不等式**）を示せ．（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式）
4. （教科書の 123〜125 ページ参照）．$V$ を内積空間とする．部分ベクトル空間 $W \subset V$ に対し

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{u} \in V \mid \text{各 } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対し } \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0\}$$

   とおき，$W$ の**直交補空間**とよぶ．
   (1) $W^{\perp}$ は $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ．
   (2) $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ であることを示せ．
   (3) $V = W \oplus W^{\perp}$ であることを示せ．
   (4) $\dim V = n, \dim W = k$ とおくとき，$\dim W^{\perp}$ を求めよ．
5. $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し $\boldsymbol{u} * \boldsymbol{v} := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k v_k \in \mathbf{R}$ と定義する．また $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbf{R}^n$ を基本ベクトルとする．
   (1) 上の $*$ は内積であることを示せ．つまり問題 2 の (1)〜(3) の性質をみたすことを示せ．
   (2) $1 \leq i, j \leq n$ に対し，$\boldsymbol{e}_i * \boldsymbol{e}_j$ を計算せよ．特に，$\boldsymbol{e}_k$ の長さ $|\boldsymbol{e}_k|_* := \sqrt{\boldsymbol{e}_k * \boldsymbol{e}_k}$ を求めよ．
   (3) 内積 $*$ に関して $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ に Gram-Schmidt の直交化法を施して得られる正規直交基底を求めよ．
6. 実数を係数とする $x$ の多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbf{R}[x]$ と書く（演習問題 1 の問題 3 参照）．
   (1) $f, g \in \mathbf{R}[x]$ に対し $f \cdot g := \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とおく．“$\cdot$” は $\mathbf{R}[x]$ 上の内積であることを示せ．
   (2) $i \geq 0$ に対し，$f_i \in \mathbf{R}[x]$ を $f_i(x) := x^i$ で定める．$f_i \cdot f_j$ を計算せよ．特に，$f_i$ の長さ $|f_i|$ を求めよ．

**補足．**

(i) ベクトル空間は，$\mathbf{K}^n$ の性質のうち，和とスカラー倍だけを取り出し抽象化したものでした．$\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 内積は $\mathbf{R}^n$ が標準的な座標（つまり基本ベクトル）を持つことを使って定義されるもので，一般のベクトル空間上で定まるものではありません．そこで，Euclid 内積の定義式でなく，それが持つ性質，つまり問題 2 の (1)〜(3) だけに注目して抽象化したのが一般の内積です．一般的に，内積はベクトル空間にもともと備わっているものでなく，後から人工的に与えるものです．
抽象化の結果，$\mathbf{R}^n$ とは別のベクトル空間にもいろいろな内積を定義でき，「ベクトル」の「長さ」や「角度」を定められます．これにより，例えば問題 6 の $\mathbf{R}[x]$ のような，$\mathbf{R}^n$ でないベクトル空間内で幾何学を行えるようになります．

また，もともとの $\mathbf{R}^n$ にも，Euclid 内積とは異なる様々な内積が考えられます．例えば問題 5 の内積を持つ $\mathbf{R}^n$ は，(2) を計算してみるとわかりますが，方向によって長さが偏っているような，Euclid 空間に比べて「歪みのある」ベクトル空間になっています．

(ii) 問題 2 の (3) は「片側の」分配法則しか考えていないように見えますが，「もう一方の」分配法則も成立します．$\mathbf{R}^n$ の Euclid 内積なら直接示せますが，一般の場合も (2) と (3) を合わせると自動的に導かれます．

(iii) Gram-Schmidt の直交化法は，もとのベクトルの順序により異なる正規直交系を与えます．例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ からは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ が得られますが，$\boldsymbol{v}_1' = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ からは $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が得られます．「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ に対して Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて⋯」と問われたら，講義でやったのと同じ順序で，$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1'/|\boldsymbol{u}_1'|$（ただし $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{v}_1$ とする），$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2'/|\boldsymbol{u}_2'|$（ただし $\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とする），... を答えてください．

一般的に，Gram-Schmidt の直交化法を具体的に実行するのは大変です．ゆっくり注意深くやることが大切です．1 つのコツとして，例えば問題 1 (1) では $\boldsymbol{u}_2' = \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ となると思いますが，$\boldsymbol{u}_2 := \dfrac{\boldsymbol{u}_2'}{|\boldsymbol{u}_2'|}$ を計算するときに，$\boldsymbol{u}_2'$ の代わりに $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ について $\dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$ を計算しても，同じ $\boldsymbol{u}_2$ が得られます．後者の方が簡単でしょう．このようになる理由は，やってみるとすぐにわかると思います．係数 3/5 が正であることが重要です．

このようにして答が出たら，**それが正規直交系か**（つまり，$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ となっているか）**を必ず確認する**ようにしてください．ある程度ミスの可能性を減らせます．

(iv) 内積空間の内積やベクトルの長さは，教科書ではそれぞれ ( , ) や $\|\boldsymbol{v}\|$ で表していますが，この講義では $\cdot$ や $|\boldsymbol{v}|$ にしています．後者を採用している教科書もあり，この講義でもそうしていますが，そうしなければならない理由は特にありません．記号が何を表すか明確でありさえすれば，好きなほうで書いても差し支えありません．

(v) 講義では簡単のため $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間のみを扱いました．その場合は $\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 内積をもとに一般の場合を考えました．$\mathbf{C}$ 上のベクトル空間の場合，次の式で定義される $\mathbf{C}^n$ 上の **Hermite 内積**をもとにします：

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{v}_k \in \mathbf{C}$$

ただし $\bar{z}$ は $z \in \mathbf{C}$ の**複素共役**，つまり $z = x + \sqrt{-1}\,y\ (x, y \in \mathbf{R})$ のとき $\bar{z} = x - \sqrt{-1}\,y$ です．$\mathbf{C}^n$ と Hermite 内積の組を **Hermite 空間**と呼びます．Hermite 内積は，$\mathbf{R}$ 上の内積の条件 (1), (3) をみたし，(2) の代わりに

(2)' $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}$

をみたします（確かめてみてください）．一般の $\mathbf{C}$ ベクトル空間 $V$ 上の内積とは，各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し何らかの複素数 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ を与える対応で，(1), (2)', (3) をみたすようなもののことと定義されます．(2) が (2)' に変わる点だけ注意すれば，あとは講義で扱った $\mathbf{R}$ ベクトル空間とほとんど同様です．Gram-Schmidt の直交化も可能です．

(vi) 内積空間 $V$ においては，基底が 1 つ与えられると，講義でやった Gram-Schmidt の直交化法により，正規直交系からなる基底に取り換えることができます．ここまでくると，$V$ の正規直交基底を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ または Hermite 空間 $\mathbf{C}^n$ の標準的な正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対応させることで，$V$ はほとんど $\mathbf{K}^n$ と変わらないように見えます．実際，$n$ 次元ベクトル空間は，基底を与えれば $\mathbf{K}^n$ と同一視され，さらに内積が与えられていれば，内積の構造も含めて Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ と，または Hermite 空間 $\mathbf{C}^n$ と同一視されます．「同一視」の意味は講義の後半で述べます．

(vii) Gram-Schmidt の正規直交化に関する定理 5.10 の証明は時間の都合で割愛しました．教科書に述べられている同内容の命題 4.20 の証明はかなり省略されているので，以下に概要を述べておこうと思います．

**定理 5.10 の証明．** $V$ を内積空間とします．まず次の主張 (A), (B) を示します．

(A) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が 1 次独立であるとき

(1) $\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}\ (1 \leq i \leq m)$. 演習問題 3-5 を参照してください．

(2) $k < m$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ も 1 次独立である．（教科書の命題 4.7 (1) 参照）

証明． 対偶を示します．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属と仮定すると $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$ かつ $(r_1, \ldots, r_k) \neq (0, \ldots, 0)$ となる $r_1, \ldots, r_k$ があります．このとき $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k + 0 \cdot \boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$ でもあるので $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$

も 1 次従属です．

(B) $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ とするとき，$\boldsymbol{u} := \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ とおくと $|\boldsymbol{u}| = 1$ かつ $\langle \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u} \rangle$.

**証明.** $|\boldsymbol{u}| = \left| \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \right| = \dfrac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = 1$, また $\langle \boldsymbol{u} \rangle = \{a\boldsymbol{u} \in V \mid a \in \mathbf{R}\} = \{b\boldsymbol{v} \in V \mid b \in \mathbf{R}\} = \langle \boldsymbol{v} \rangle$. 2 つ目の等号は $b = a/|\boldsymbol{v}|$ とおいたと考えるといいでしょう．$a$ または $b$ が $\mathbf{R}$ 全体を動けば，もう一方も $\mathbf{R}$ 全体を動きます．

定理 5.10 の証明に入ります．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が内積空間 $V$ の 1 次独立なベクトルであるとき，Gram-Schmidt の方法で正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ を作ることができ，しかも $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ となる，という主張です．これを $m$ に関して帰納的に示します．

まず (A-1), (B) より $|\boldsymbol{u}_1| = 1, \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ です．これが $m = 1$ の場合です．

$k \geq 2$ とし，$m = k - 1$ で主張が成り立っていると仮定します．つまり以下を仮定します：

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1} \text{ が正規直交系で } \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \rangle \tag{★}$$

このとき $\boldsymbol{u}'_k \neq \boldsymbol{0}$ です（従って (B) より $|\boldsymbol{u}_k| = 1$ です）．

**証明.** $\boldsymbol{u}'_k = \boldsymbol{v}_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{u}_i) \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$ と仮定します．簡単のため $c_{ki} := \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{u}_i$ とおくと

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1} \rangle \overset{(★)}{=} \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \rangle$$

ですから，$\boldsymbol{v}_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} r_i \boldsymbol{v}_i$ と書けます．これを $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} r_i \boldsymbol{v}_i + (-1) \cdot \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ と書き直せば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次従属であることがわかり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立であることと (A-2) に矛盾します．

次に，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が正規直交系であることを示します．つまり $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker のデルタ) が $1 \leq i, j \leq k$ について成り立つことを示します．まず $1 \leq i, j \leq k - 1$ のときは (★) より $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ です．あとは $1 \leq j \leq k - 1$ に対し $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_k = 0$ を言えば十分ですが，それは次のように示されます．まず

$$\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}'_k = \boldsymbol{u}_j \cdot \Bigl( \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \boldsymbol{u}_i \Bigr) = c_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = c_{kj} - c_{kj} = 0$$

です．3 番目の等号は (★) より $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq k - 1)$ であることによります．よって $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}'_k}{|\boldsymbol{u}'_k|} = 0$ です．こうして $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は正規直交系であることがわかります．特に $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は 1 次独立でもあります（講義の命題 5.9, 教科書の命題 4.18 参照）⋯◎

最後に $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ を示します．まず $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1} \rangle \overset{(★)}{=} \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \rangle$ より

$$\boldsymbol{u}'_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \boldsymbol{u}_i \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

に注意します．このことから $\boldsymbol{u}_k \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ です．これと (★) を合わせると

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle \subset \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

です．講義の命題 4.6 と◎より，両辺とも次元が $k$ のベクトル空間ですから，講義の系 4.7 (2) より

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

です．