2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 8

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の写像は線形であることを示せ．それぞれの核 (kernel) と像 (image) を求めよ．
   (1) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\quad f(x, y) = -x + 2y$
   (2) $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\quad g(x) = (3x, 2x)$
   (3) $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\quad h(x, y) = (x + y, x - y)$
2. 次の写像は線形ではないことを示せ．
   (1) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\quad f(x, y) = x^2 + 2y$
   (2) $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\quad g(x) = (x + 1, 2x)$
   (3) $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad h(x) = \log(x^2 + 1)$
3. 次の写像は線形であることを示せ．それが全射であるか，また単射であるか，判定せよ．
   (1) $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\quad f_1(x, y) := x - y$
   (2) $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\quad f_2(x, y) := (x - y, 2x - y)$
   (3) $f_3\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\quad f_3(x, y) := (x - y, x - 2y, 2x - 3y)$
   (4) $f_4\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\quad f_4(x, y, z) := (x - y + z, 2x - 2y + 2z, 3x - 3y + 3z)$
4. U, V, W を $\mathbf{K}$ ベクトル空間，$f\colon U \to V$ と $g\colon V \to W$ を線形写像とするとき，$g \circ f\colon U \to W$ も線形であることを証明せよ．
5. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする．
   (1) $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ を線形写像とする．$f(1) = a$ とおき，各 $x \in \mathbf{K}$ を $x = x \cdot 1$ と見ることにより，$f(x) = ax$ であることを示せ．
   (2) $g\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2$ を線形写像とする．$g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{v}_1, g(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{K}^2$（縦ベクトル）とおき，$2 \times 2$ 行列 $A := \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ を考える．各 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ に対し，$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$ と見ることにより，$g(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ であることを示せ．
   (3) $h\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ を線形写像とする．$1 \le k \le n$ に対し $\boldsymbol{v}_k := h(\boldsymbol{e}_k) \in \mathbf{K}^m$ とおき，$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ を考える．すべての $\boldsymbol{u} \in \mathbf{K}^n$ に対し $h(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ となることを示せ．
6. V, W をそれぞれ n 次元，m 次元 $\mathbf{K}$ ベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^m$ をそれぞれ V, W の基底とする．
   (1) $n \le m$ とする．線形写像 $f\colon V \to W$ を $f(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ で定める．つまり，一般の元 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i \in V$ に対しては $f(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^n x_i f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{w}_i$. このとき，$f$ は単射であることを示せ．
   (2) $n \ge m$ とする．線形写像 $g\colon V \to W$ を，$g(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le m)$, もし $n > m$ なら $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_m$ $(m + 1 \le j \le n)$ で定める．g は全射であることを示せ．
   (3) $n = m$ とする．線形写像 $h\colon V \to W$ を，$h(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ で定める．h は同型であることを示せ．
7. (1) (i) $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $f(x, y, z) := (2x + y - z, x + 2y + 3z)$ で定める．f は全射であることを示せ．
   (ii) $\boldsymbol{v}_1 := (1, -1), \boldsymbol{v}_2 := (1, 1)$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．
   (iii) $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$ となる $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2)$ を 1 組求め，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立であることを示せ．
   (2) (i) $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を $g(x, y) := (x + y, x - y, 2x + 3y)$ で定める．g は単射であることを示せ．
   (ii) $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1), \boldsymbol{v}_2 := (2, -1)$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．
   (iii) $\boldsymbol{w}_i := g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2)$ を計算し，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立であることを示せ．
8. 実数を係数とする x の多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbf{R}[x]$ と書き，n 次以下の実数係数多項式全体がなす部分ベクトル空間を $\mathbf{R}[x]_{\le n}$ と書く．
   (1) 写像 $I\colon \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$ を $I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx$ で定義する．I は線形写像であることを示せ．
   (2) $1, x, \ldots, x^n \in \mathbf{R}[x]_{\le n}$ は $\mathbf{R}[x]_{\le n}$ の基底であることを示せ．$I(x^i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ を計算せよ．
   (3) 同型写像 $\mathbf{R}[x]_{\le n} \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^{n+1}$ を 1 つ構成せよ．

補足.

(i) 集合 A, B の間の**写像** (map) $f\colon A \to B$ とは，各 $a \in A$ に対し $f(a) \in B$ が**ちょうど 1 つ**定まる対応をいいます．A を f の定義域，B を f の値域とよびます．$a \in A$ に対し $f(a) \in B$ が対応することを，$f\colon a \mapsto f(a) \in B$ のように書くこともあります．典型的な例は $f(x) = x^2 + 1$ や $g(x) = \sin x$ といった**関数** $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で，これらは各 $x \in \mathbf{R}$ に $f(x) \in \mathbf{R}$ がちょうど 1 つ対応しています．一方，$A = \{$ 信大生 $\}$, $B = \{$ 講義科目 $\}$ という集合を考え，$x \in A$ に対し $f(x) :=$ (xの好きな科目) という対応を考えようとすると，多くの $x \in A$ に対し $f(x)$ はちょうど 1 つには定まらないと思うので，f は写像ではないと思います．なるべくたくさん定まってほしいものです．

(ii) $f(x) := \sqrt{x}$ という関数は，$x \geq 0$ に対してのみ意味を持ちますから，この f の定義域は $\mathbf{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ です．$\sqrt{x} \geq 0$ ですから値域も $\mathbf{R}_{\geq 0}$ で，従って $f\colon \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ です．一方，$f(x) \in \mathbf{R}$ と書いても間違いではありませんから，$f\colon \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$ ともみなせます．一般に，写像 $f\colon A \to B$ について，もし $B \subset C$ であれば，$f\colon A \to C$ ともみなせます．このように，$f(x)$ をどの集合の要素と見るかによって f の値域は変わります．定義域については，$f(x) = \sqrt{x}$ を見るとわかるように，あまり安易に変えてはいけません．

(iii) ベクトル空間 V, W について，写像 $f\colon V \to W$ が**線形** (linear) であるとは，各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ と $r, s \in \mathbf{K}$ に対し

$$f(r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}) = rf(\boldsymbol{u}) + sf(\boldsymbol{v})$$

が成立することです．左辺の和やスカラー倍は V のもの，右辺の和やスカラー倍は W のものです．**線形写像の条件は，f が和やスカラー倍の構造を保つことである**，と言えます．そのような写像は実はあまり多くなく，問題 5 が示すように，$V = \mathbf{K}^n$, $W = \mathbf{K}^m$ の場合は，すべての線形写像 $f\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ は，何らかの $m \times n$ 行列 A により $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と表されます．実は今後の講義で見るように，一般のベクトル空間 V, W の場合も，線形写像 $V \to W$ は本質的に行列をかける形に限られます．この意味で，**線形写像について考えることは，行列について考えることと同等です．**

(iv) 数学的には，集合とはいくつかの要素が（雑多に）集まっているだけのもので，要素の数が（然るべき意味で）同じであれば区別されません．例えば $\{$ りんご，みかん，ぶどう $\}$ と $\{$ いぬ，ねこ，うさぎ $\}$ は，どちらも数学的には 3 つの要素を持つ集合というだけで区別されません．このような視点からは，集合について調べることと言えば，せいぜい要素の数を数えることくらいです．これに対しベクトル空間 V とは，和とスカラー倍という**構造**が入った集合です．この構造があるおかげで，この講義でやっているように，体系的に V を調べることができます．

写像は 2 つの集合に関連をつけるものとも考えられますが，雑多な集合の間の雑多な写像について数学的に調べられることは多くありません．構造の入った集合（例えばベクトル空間）の間の写像としては，その構造を保つ写像（例えば線形写像）を考えるのが筋の良い考え方で，そのような写像については，今後の講義で見るように，いろいろなことを体系的に調べることができます．**構造の入った集合や写像に対象を絞ることで，理論が深まるわけです．**

(v) 線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射でもあれば，V のベクトルと W のベクトルが，和とスカラー倍の構造も込みで，完全に 1 対 1 に対応するということです．このとき，V と W をベクトル空間として「同じもの」とみなします．この「同一視」を与える線形写像 f のことを同型写像と言い，同型写像が存在するとき，V と W は同型なベクトル空間である，と言って $V \cong W$ と書きます．V と W は異なるものですが，ベクトル空間としての構造だけを見れば同じものである，ということです．

(vi) 講義の系 7.13 (3) によれば，同型なベクトル空間は同じ次元を持ちます．逆に，今回の問題 2 (3) によれば，同じ次元のベクトル空間の間には同型写像を構成することができます．よって，**2 つのベクトル空間が同型であることは，次元が等しいことと同値です．**問題 4 はその例で，$\mathbf{R}[x]_{\leq n}$ と $\mathbf{R}^{n+1}$ はもちろん全くの別物ですが，ベクトル空間の構造だけを見れば同じである，というわけです．

(vii) f が全射であるとは，各 $\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が少なくとも一つ見つかる，ということです．気持ちとしては，W に含まれる情報はすべて f を通じて V から来る，という感じです．これは V のほうが情報量が多くないと実現しない状況です．講義の系 7.13 (1) より $\dim V \geq \dim W$ であることは，このことを反映しているような感じです．

一方，f が単射であるとは，$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$ である，ということです．気持ちとしては，f は V

の $\mathbf{0}$ でない情報を損なうことなく（$\mathbf{0}$ にすることなく）W に伝える，という感じです．このとき W には V の情報をすべて受け入れる容量が必要です．講義の系 7.13 (2) より $\dim V \leq \dim W$ であることは，このことを反映しているような感じです．