2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 9

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の線形写像 f_i について，その核 (kernel) と像 (image) の基底を一組ずつ求めよ．また f_i について次元定理が成り立っていることを確認せよ．
   (1) $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1,\quad f_1(x, y) := x - 3y$
   (2) $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\quad f_2(x, y) := (x + 2y,\ 2x + 4y)$
   (3) $f_3\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\quad f_3(x, y) := (x + 2y,\ 2x + 4y,\ 3x + 5y)$
   (4) $f_4\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\quad f_4(x, y, z) := (x + z,\ y + 3z)$
   (5) $f_5\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\quad f_5(x, y, z) := (x + 2y + z,\ x - y + 3z,\ 3x + 3y + 5z)$
2. （教科書 p. 147, 定理 5.11 参照）A を $n \times m$ 行列とし，$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(\boldsymbol{u}) := A\boldsymbol{u}$ で定義する．
   (1) $\operatorname{rank} A = r$ とおく．$\dim \operatorname{Ker} f = n - r$ であることを示せ．（ヒント：$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ の階の自由度の意味を考えよ）
   (2) 次元定理を使って $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$ を示せ．

補足． 線形写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，$\operatorname{Ker} f$ を求めるのは比較的簡単で，$\operatorname{Im} f$ を求めるのは多少面倒です．例えば

$$f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x - y + z \\ 3x + y - z \end{pmatrix}$$

という線形写像を例にとって考えてみます（線形であることを確認してみてください）．まず

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{matrix} \right\}$$

は，連立 1 次方程式の解全体のなす部分ベクトル空間です．この方程式を解くと $x = 0, y = z$ となることを確かめてください．よって

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であることがわかります．$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ です．
次に $\operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3$ がある $\}$ を考えてみます．$\operatorname{Im} f$ のベクトルは

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x - y + z \\ 3x + y - z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形になりますから，$\operatorname{Im} f$ のベクトルは右辺の 2 つのベクトル $\boldsymbol{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合となることがわかります．よって $\operatorname{Im} f = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$ で，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立であることが確かめられるので，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は $\operatorname{Im} f$ の基底となり，$\dim \operatorname{Im} f = 2$ です．$\operatorname{Ker} f$ の計算は連立方程式を解くだけなのに対して，$\operatorname{Im} f$ の計算は式変形に多少の工夫が必要で，やりにくく感じるのではないかと思います．
しかし，$\dim \operatorname{Im} f$ を求めるだけなら次元定理が便利で，上の例の場合は $\dim \mathbf{R}^3 = 3, \dim \operatorname{Ker} f = 1$ は比較的容易にわかりますから

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$$

であることは $\operatorname{Im} f$ の基底を求めなくてもわかります．あらかじめ $\dim \operatorname{Im} f = 2$ を知っておけば，$\operatorname{Im} f$ の基底は 2 個のベクトルからなるはずだとわかるわけですから，多少は計算の見通しが良くなるかもしれません．