2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 12

担当：境 圭一

※スペース節約のため，一部のベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の対称行列 A_k の固有値を求めよ．相異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを確かめよ．それぞれの固有空間の基底を 1 組求め，これを Gram-Schmidt の方法で正規直交化した基底を並べてできる行列を P とおくとき，$P^{-1} = {}^tP$ であることを確かめよ（このような P を**直交行列**とよぶ）．また ${}^tPAP$ が対角行列となることを確かめよ．

   (1) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. V, W を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする．$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ である．
   (1) 写像 $f\colon V \to W$ が線形 (linear) であることの定義を述べよ．
   (2) 線形写像 $f\colon V \to W$ について，$\mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Im}\, f$ の定義を述べよ．これらはそれぞれ V, W の部分ベクトル空間であることを示せ．

3. 次の写像 f_k は線形であることを示せ．$\mathrm{Ker}\, f_k, \mathrm{Im}\, f_k$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ．
   (1) $f_1\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^1$,　$f_1(x, y) := 3x - y$
   (2) $f_2\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2$,　$f_2(x, y) := (2x + y, 4x + 2y)$
   (3) $f_3\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^3$,　$f_3(x, y) := (x + 2y, 2x - y, 3x + 2y)$
   (4) $f_4\colon \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^2$,　$f_4(x, y, z) := (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z)$

4. A を $n \times n$ 行列とする．$\lambda \in \mathbf{C}$ が A の固有値であることの定義を述べよ．λ が A の固有値であるとき，λ に属する固有ベクトル，ならびに固有空間 $V(\lambda)$ の定義を述べよ．$V(\lambda)$ は $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

5. （教科書 p. 148, §5.3 参照）．$(V, \cdot)$ を $\mathbf{R}$ 内積空間とし，$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とする．
   (1) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i$ が成り立つことを示せ．ヒント：$\{\boldsymbol{v}_i\}$ が基底だから $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ とおける．両辺と $\boldsymbol{v}_j$ の内積を取ると a_j が求まる．
   (2) 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ をみたす線形写像 $f\colon V \to V$ を考える（このような f を**直交変換**という）．各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $|f(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ であることを示せ．
   (3) 直交変換 $f\colon V \to V$ は同型写像であることを示せ．ヒント：(2) より $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ を示せる．これと f の定義域，値域が共通であることから f が全単射であることがわかる．
   (4) V の基底 $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ に対し，$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} A$ をみたす $n \times n$ 行列 A を，$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ に関する $f\colon V \to V$ の**表現行列**とよぶ．f が同型写像であるとき，$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ に関する f の表現行列 A は正則で，A^{-1} は $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n$ に関する $f^{-1}\colon V \to V$ の表現行列であることを示せ．
   (5) 正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ に関する直交変換 f の表現行列は直交行列（問題 1 参照）であることを示せ．

補足． 問題 2 以降は今までの復習です．問題 1 も，以前やった対角化可能性の判定・実際に対角化する方法の復習になると思います．十分に準備して期末試験に臨んでください．
問題 1 でわかるように，対称行列は直交行列で対角化されますが，講義では時間の都合で証明を割愛しました．対称行列の一般化である**正規行列**の対角化や，対角化できない行列についての**上三角化**や**ジョルダン標準形**といった変形方法など，やるべきことはまだたくさんあります．また，教科書の二次形式の部分も時間の関係で割愛しました．幾何学と線形代数が結びついた面白い内容です．こういった内容については，興味があればぜひ自習してみてください．一部は教科書に書いてありますし，より進んだ参考書には上記のことがすべて書かれています．

大学の数学は高校数学とはずいぶん雰囲気が変わり，非常に抽象的でわかりづらく感じることが多いのではないかと思います．また生物・地学などを学ぶ上で数学を使う機会はそれほど多くないかもしれず，モチベーションを上げるのはなかなか難しかったかもしれません（もちろん，どの分野でも数学を応用できる可能性はあると思います）．数

学科以外での数学の講義は，とにかく計算ができればいい，という雰囲気になりがちですが，この講義では敢えてある程度本格的に抽象的な数学をやってみています．目先のこと（単位など）にとらわれずにしっかり数学を学んだ人は，きちんと筋道立てて物事を考える素養が少し備わったのではないかと思います．そのような力が，数学の内容以上に，必ず今後に生きるはずです．自信をもって自分の専門分野に進んでください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_linear2/19_linear2.html