2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 1 コメント

担当：境 圭一

$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ ですから，$\mathbf{R}^4$ の基底は必ず 4 つのベクトルの組です．一般に，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4 \in \mathbf{R}^4$ が $\mathbf{R}^4$ の基底であるとは，次の (1), (2) の**両方**をみたすことです：

(1) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ は **1 次独立**，つまり $r_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{u}_4 = \mathbf{0}$ をみたす $r_1, \dots, r_4$ は $r_1 = \cdots = r_4 = 0$ に限る
(2) $\mathbf{R}^4 = \langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4 \rangle$, つまり $\mathbf{R}^4$ のすべてのベクトルは $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次結合で表せる

逆に言うと，(1), (2) の一方でもみたされなければ（もう一方がみたされたとしても）$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底ではありません．
まず $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ が上の (1) をみたすかを調べてみます．

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \tag{a}$$

と仮定してみて，これを $r_1, \dots, r_4$ に関する連立 1 次方程式とみなして解を求めると，（n に関係なく）$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ になるはずです．よって $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立です．
講義で $\dim \mathbf{R}^4 = 4$ であることを見ました．講義の命題 4.6 により，$\mathbf{R}^4$ の k 個のベクトルの組が 1 次独立なとき $k \leq 4$ で，$k = 4$ のとき，それらの組は $\mathbf{R}^4$ の基底をなします（つまり上の (2) もみたされる）．従って $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底です．

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ の 1 次独立性を調べるには，(a) の解が $r_1 = \cdots = r_4 = 0$ に限るかを調べてもいいのですが，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ を並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}$$

の階数 $\operatorname{rank} A$ を調べるのも 1 つの手です．$\operatorname{rank} A = 4$ なら $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立であり，$\operatorname{rank} A \leq 3$ なら $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立ではありません．さらに今回の場合は A が 4 次正方行列なので，$\operatorname{rank} A = 4 \iff \det A \neq 0$ です．よって $\det A$ を計算すれば，1 次独立性についてはっきりしたことが言えます．
上の連立方程式によるやり方と，ここで述べた行列の階数によるやり方は，同じことを別の方法で考えているだけですから，答案に両方を書く必要はありません．片方で十分です．

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立であることは多くの人が述べていましたが，それが基底であることを結論づけるには，上記の条件 (2) にあたることが必要で，それもきちんと述べていた答案は多くありませんでした．講義の命題 4.6 によれば「$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ だから」の一言があれば十分です．
過程も含めて正しければ 10 点です．細かい計算はあまり見ていませんが，明らかに間違っていれば減点しています．(a) または $\operatorname{rank} A$, $\det A$ を考えようとしていれば，途中で計算を間違えたとしても 3 点程度つけています．具体的な計算なしに「$A = \cdots$ とおくと $\det A \neq 0$ である」と述べてあっても，本当に計算して 0 でないと確かめたのか，根拠なく当てずっぽうで主張しているのかわかりません．読んで納得できる根拠がなければ大きく減点されます．

以下に誤った記述の例を挙げますが，多くは誰かの誤った記述を丸写ししているものと思われます．みんなで議論して考えるのは大切なことですが，**他人のレポートを何も考えずに丸写ししていても得るものはなく，ただの時間の浪費です**．目先の得点などというつまらないものにとらわれて頭を使うことを放棄していると，社会で必要な素養が身についていないことに卒業したあとから気づくことになって，最終的には自分の首を絞めることになります．

- 行列の基本変形の前後で行列は変化していますから，等号で結ぶのは誤りと言えます．
- △「$\operatorname{rank} A = \cdots = 4$. よって 1 次独立である」→○「$\operatorname{rank} A = \cdots = 4$. よって $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である」
  主語がない文章が目立ちます.「何が」1 次従属なのか明確にすべきです．
- ×「 1 次結合が成り立つ」→「$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である」
  「1 次結合が成り立つ」という日本語はありません.「$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合とは $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$ $(r_1, \dots, r_n \in \mathbf{K})$ の形で表されるベクトルである」という文なら意味があります．
- ×「 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立だから $\operatorname{rank} A = 4$ である」→もちろんこれらは同値ではありますが，今の話の流れだと

○「$\mathrm{rank}\, A = 4$ だから $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である」
が正確です．

- ×「 A は基底である」→○「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底である」
  行列が基底になることはありません．基底になるのは行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ です．
- ×「 $\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトルは $\mathbf{R}^4$ の基底である」→○「$\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底である」
  前者だと，$\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトルの組は（何であっても）基底である，ということになりますが，それは誤りです．例えば，1 次独立でない 4 つのベクトルの組は基底ではありません．