2019 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 2 略解・コメント

担当：境 圭一

固有値は $-1, n+1, 10-n$ で，それぞれに属する固有空間は，例えば

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(n+1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(10-n) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表せます．固有空間の基底の取り方はいろいろありますが，この問題の場合，固有空間自体は n によりません．

固有値は t の方程式 $\phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = 0$ の解として求められます．左辺は $(t+1)(t-(n+1))(t-(10-n))$ と因数分解されます．各自の n の値を代入して計算することはもちろん可能ですし，n を残したまま計算することもできます．いずれにしても，分数のまま計算するのはミスのもとですから，1/9 はくくり出して計算するべきです．
固有値 -1 に属する固有空間は

$$V(-1) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^3 \mid (-E_3 - A)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\}$$

と定義されます．$f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ を $f(\boldsymbol{u}) := (-E_3 - A)\boldsymbol{u}$ で定めれば，$V(-1) = \operatorname{Ker} f$ とも表せます．いずれにしても，$V(-1)$ は連立方程式

$$(-E_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3n-19 & 26 & -6n+14 \\ 26 & 3n-46 & 6n-40 \\ -6n+14 & 6n-40 & -52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解全体のなす部分空間です．この連立方程式をみたす (x, y, z) は，整数 n に関係なく

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{C})$$

の形になります．$V(n+1), V(10-n)$ も同様です．

講義での話から，$\phi_A(t) = 0$ の解 λ を求め，$(\lambda E_3 - A)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ をみたす $\boldsymbol{u}$ を求め，…という手順は決まりきっているわけですが，それを暗黙の了解のように書くのは感心しません．例えば

（よくない）　$\phi_A(t) = \cdots = t^3 - 10t^2 + (-n^2 + 11n - 22)t - (n+1)(n-10) \qquad t = -1, n+1, 10-n$

などと書くのは不十分で，次のように書かれるべきです：

（よい）　$\phi_A(t) = \cdots = t^3 - 10t^2 + (-n^2 + 11n - 22)t - (n+1)(n-10)$ であるから，
$\phi_A(t) = 0$ **とすると** $t = -1, n+1, 10-n$ である．

講義のレポートでは言葉足らずでも通じるかもしれませんが，例えば自分のことを外部にアピールするような文章を書く場合はそうはいきません．読み手はこちらの都合など知らないわけですから，行間を読んでわかってもらおうなどというのは無理です．**こちらの言いたいことを過不足なく伝えるにはどうしたらよいか，**日頃から考えておかないと，必要なときにいきなりできるようにはなりません．
$\phi_A(t)$ を求めるときに 1/9 をくくりだしたほうがよい，と上で述べましたが，何人かの人が $\det \frac{1}{9}(tE_3 - 9A)$ を計算してしまい，正しい固有値の 9 倍を求めてしまっていました．計算すべきなのは，もちろん

$$\det \frac{1}{9}(9tE_3 - 9A) = \left(\frac{1}{9}\right)^3 \det(9tE_3 - 9A) = 0$$

の解です．
また，最終的には因数分解して解を求めるわけですから，途中で式をすべて展開してしまうのは得策ではありません．可能な限り共通因子をくくり出してから，最後に展開すると楽になるはずです．

いくつか目立った誤りについて追加します．

- 一般に，A を n 次正方行列，$k \in \mathbf{K}$ とするとき，$\det(kA) = k^n \det A$ です．この問題の場合は $k = \dfrac{1}{9}$ でこの等式を使おうとした人が多いと思いますが，単に $\dfrac{1}{9}$ を前に出した人が多くいました．そのようにした人は固有方程式が $81t^3 + \cdots$ の形になったと思いますが，それは誤りで，一般に n 次正方行列の固有多項式は $\phi_A(t) = t^n + \cdots$ の形になります．
- “$V(-1) = (2, 2, -1)$” のような誤りが目立ちます．これだと左辺はベクトル空間，右辺は（単一の）ベクトルになっていて，性質の異なるものが等号で結ばれており，明らかに誤りです．
- 計算ミスの結果，“$V(\lambda) = \{\mathbf{0}\}$” となってしまった答案もいくつかありました．**固有空間が $\mathbf{0}$ だけからなることはあり得ません．**実際，λ が A の固有値であるとは，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたす $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在することですから，少なくともこの $\boldsymbol{x}$ は $V(\lambda)$ の元です．

数学的な誤りの話ではありませんが，途中計算のメモを欄外に残したようなレポートを提出していてはダメです．例えば履歴書を提出するときに，欄外に何かのメモが残っていたら，人事はどう思うでしょうか？