※ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の和と実数倍は通常のもの，内積は Euclid 内積とする

※答案に書くベクトルは縦横どちらでもよい

※答案用紙には答のみ記入すること．途中経過が書かれていて誤りを含む場合は減点対象になり得るので注意すること．

1. $a \in \mathbf{R}$ を定数とするとき
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + (a+1)y = a - 1, \\ y + (a-1)z = a + 2 \end{array} \right\}$$
は $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間かどうか答えよ．

2. 次のベクトルの組は $\mathbf{R}^n$ の基底かどうか答えよ．ただし (1), (2) では $n = 3$, (3) では $n = 4$ である．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

3. 次の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbf{R}^n$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を求めよ．ただし (1), (2), (3) ではそれぞれ $n = 2, 3, 4$ である．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

4. $x \in \mathbf{R}$ とし，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ とする．$W_1 := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, W_2 := \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ に対し，$W_1 + W_2$ が直和でないとき，x^2 の値を求めよ．

配点：5, 15, 15, 5 （各小問につき 5 点，40 点満点）