線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）中間試験（2019 年 12 月 10 日）解答例・解説

担当：境 圭一

解答例.

1. 部分ベクトル空間でない
2. (1) 基底である
   (2) 基底でない
   (3) 基底である
3. (1) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
   (2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$
   (3) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$
4. $x^2 = 9$

解説.

1. 演習問題 2 を見てあれば容易なはず．ベクトル空間とは，おおむね「定数項が 0 の連立 1 次方程式で表される集合」だと思えばよい．この問題の場合，$a-1$ と $a+2$ が同時には 0 にならないことから，W は $\mathbf{0}$ を含まないのでベクトル空間にはなり得ない.
2. $\dim \mathbf{R}^n = n$ だから，$\mathbf{R}^n$ の基底は n 個のベクトルからなる．この時点で (2) は $\mathbf{R}^3$ の基底でないことがわかる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbf{R}^n \cdots$ ☆は，それが 1 次独立なら基底で，1 次従属なら基底ではない．☆が 1 次独立であることと，これらを並べてできる $n \times n$ 行列が正則であることは同値だった．もちろん $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ の解が $r_1 = \cdots = r_n = 0$ に限るか否かを見てもよい.
3. 具体的な計算問題は，得た答えが正しいかを判断する材料に乏しいのでリスクが高い．しかし Gram-Schmidt の直交化法を行う問題に関しては，答が直交系になっているか確認するのが比較的容易なので，ある程度リスク回避できる．つまり，計算して得た $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ について $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j$ を計算してみて，もしこれが δ_{ij} (Kronecker の delta) になっていなければ，どこかで計算を間違えていることになる.
4. x の値に関わらず, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立であり, $\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ も 1 次独立であることはすぐにわかる．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ はそれぞれ W_1, W_2 の生成系にもなっているから，これらは W_1, W_2 の基底になっており，従って $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ である．これらを和空間の次元公式に適用すると $\dim(W_1 + W_2) = 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$ となるから，$W_1 + W_2$ が直和であること，つまり $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であることと $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$ であることは同値である．$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 = \mathbf{R}^4$ になるとき，$\mathbf{R}^4$ のベクトルは W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和に一意的に表せるが，これらはそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ の 1 次結合で一意的に表せるから，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底となる．それは $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立であること，つまり $A := \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4\end{pmatrix}$ が正則であることに他ならない.
   問われているのは $W_1 + W_2$ が直和でない場合だから，求めるのは $\det A = x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$ となるような x である．$x \in \mathbf{R}$ だから $x^2 \geq 0$ であることに注意.

配点：5, 15, 15, 5 （各小問につき 5 点，40 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_linear2/19_linear2.html