多様体論 演習問題 1（2019 年 10 月 1 日）

担当：境 圭一

1. (1) M を $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を局所座標系とする n 次元 C^∞ 級多様体とする．M の開集合 $U \subset M$ は，$\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap U}\colon U_\alpha \cap U \to \mathbb{R}^n$ を局所座標系とする n 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ．特に $\mathbb{R}^n$ の開集合は n 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ．

   (2) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，$M := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = F(x_1, \dots, x_n)\}$ とおく．M は $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, $\varphi(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x}))$ を（局所）座標系とする n 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ．

2. M から N への微分同相写像 $f\colon M \to N$ が存在するとき $M \cong N$ と書く．$\cong$ は多様体全体のなす集合上の同値関係であることを示せ．

3. (1) 実数全体の集合に Euclid 位相を入れた位相空間を $\mathbb{R}^1$ と書き，同じ集合に離散位相を入れた位相空間を $\mathbb{R}^1_{\mathrm{d}}$ と書く．$M := \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_{\mathrm{d}}$ に直積位相を入れる．

   (a) M は第 2 可算公理をみたさないことを示せ．

   (b) M は多様体の定義にある条件のうち，第 2 可算公理以外の条件をすべてみたすことを示せ．$\dim M$ を求めよ．

   (2) $\mathbb{R}^2$ に通常の Euclid 位相を入れ，$\widetilde{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm 1\}$ に相対位相を入れる．$\widetilde{M}$ 上の関係 $\sim$ を次で定義する：

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x, y) = (x', y') \quad \text{または} \quad x = x' \neq 0,\ y \neq y'$$

   (a) $\sim$ は同値関係であることを示せ．

   (b) 商集合 $M := \widetilde{M}/{\sim}$ に等化位相を入れる．M は多様体の定義にある条件のうち，Hausdorff 性以外の条件をすべてみたすことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足．

(i) 多様体論をやるにあたり，位相空間論の知識がどうしても必要です．位相空間論は初めて出会う本格的な抽象論のように見えるかもしれず，苦手意識があるかもしれません．そのような人が多様体論をやるときに陥りがちな過ち（と筆者が思うもの）は

(a) 自分には無理だと諦める

(b) 位相空間論をもう一度最初からすべてやり直そうとする

の 2 つです．(a) は置いておくとして，(b) は意気込みはよいかもしれませんが非効率的なのでおすすめできません．それよりは

(c) 多様体論をやる過程で出てくる位相空間論の内容がわかるか自問し，わからなければ復習する

という姿勢のほうが建設的です．位相空間論は，やろうと思えばいくらでも深い（というか，マニアックな）内容に入り込むことができてしまうもので，それが苦手意識に拍車をかけているようにも思えます．そういった内容まで復習しようとしていては時間がいくらあっても足りません．多様体論で出てくるくらいの内容がわかれば当面は困らないはずで，逆にそれらがわかるくらいの力がついていれば，マニアックな内容が必要になったとしても自習できるようになっているはずです．

(ii)「多様体論で出てくるくらいの内容」として，位相空間の定義，連続写像の定義などは当然ですが，「部分集合に入る相対位相」「商集合に入る等化位相」など，ある位相空間から別の位相空間を作るときに出てくる位相の入れ方があります．**これらの位相の決め方は，付随する重要な写像が連続になるような決め方である**という点に注意すると理解しやすくなるかもしれません．例えば位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ には通常は相対位相を入れますが，これは包含写像 $i\colon A \to X$ が連続になるような A の位相のうち最弱のものです（位相が「弱い」というのは，開集合が少ないことを指します）．同じように，位相空間 X 上に同値関係 $\sim$ が定まっているとき，商集合

$X/{\sim}$ には通常は等化位相を入れますが，これは自然な全射 $p\colon X \to X/{\sim}$ が連続になるような位相のうち最弱のものです．直積位相は少し注意が必要で，$\mathrm{pr}\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ を第 i 射影とするとき，$\mathrm{pr}_i^{-1}(O)$ $(O \in \mathcal{O}(X_i), i = 1, 2)$ の形の集合で**生成される**位相です．この位相に関して pr_i は連続になっています．

(iii) 多様体の例として想定しているのは，問題 1 のように $\mathbb{R}^n$ の開集合になっているもの，あるいは（局所的に）C^∞ 級関数のグラフになっているようなもので，具体的には球面やトーラスなどが挙げられます．ただし，今後扱う**射影空間**のように，必ずしも $\mathbb{R}^n$ の部分集合としては定義されないものもあることに注意してください．

多様体の定義のうち「第 2 可算公理をみたす Hausdorff 空間」という条件は，少し進んだ内容をやる上では重要ですが，多様体論の入門的な講義では表立って使われないこともよくあります．これらを仮定しないと，多様体論で扱いたい空間とは趣の異なる，直感に反するようなものも多様体としなければならなくなります．問題 3 はそのような例です．