多様体論 演習問題 2（2019 年 10 月 8 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$n=0,1,2,\dots$ に対し $S^n_{\mathbb{K}}:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^{n+1}\mid |\boldsymbol{x}|=1\}$ とおく．特に $S^n_{\mathbb{R}}$ を単に S^n と書き，n 次元球面と呼ぶ．$S^0:=\{x\in\mathbb{R}^1\mid |x|=1\}=\{\pm1\}\subset\mathbb{R}^1$ である．

1. (1) $n=0,1,2,\dots$ に対し，S^n はコンパクトであることを示せ．
   (2) $n\in\mathbb{N}$ に対し，射影空間 $\mathbb{K}P^n:=S^n_{\mathbb{K}}/\sim$ はコンパクトであることを示せ．
2. (1) $n\in\mathbb{N}$ とする．$i=1,\dots,n+1$ に対し $U_{i,\pm}:=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n\mid \pm x_i>0\}$ とおく．$\{U_{i,\epsilon}\}_{i=1,\dots,n+1,\ \epsilon=\pm}$ は S^n の開被覆であることを示せ．
   (2) $\varphi_{i,\pm}\colon U_{i,\pm}\to\mathbb{R}^n$ を $\varphi_{i,\pm}(\boldsymbol{x}):=(x_1,\cdots\overset{\wedge}{\underset{i}{}}\cdots,x_{n+1})$ で定義する．$\mathring{D}^n:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\mid |\boldsymbol{y}|<1\}$ とおくとき $\varphi_{i,\pm}\colon U_{i,\pm}\to\mathring{D}^n$ であり，これは同相であることを示せ．逆写像 $(\varphi_{i,\pm})^{-1}\colon\mathring{D}^n\to U_{i,\pm}$ を求めよ．
   (3) $i\neq j$ と $\delta,\epsilon=\pm$ に対し $\varphi_{j,\delta}\circ(\varphi_{i,\epsilon})^{-1}\colon\varphi_{i,\epsilon}(U_{i,\epsilon}\cap U_{j,\delta})\to\varphi_{j,\delta}(U_{i,\epsilon}\cap U_{j,\delta})$ を求め，これは C^∞ 級であることを示せ．従って $\{U_{i,\epsilon},\varphi_{i,\epsilon}\}_{i=1,\dots,n+1,\ \epsilon=\pm}$ は S^n の局所座標系である．
3. $\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 上の関係 $\simeq$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{y}\simeq\boldsymbol{y}' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ある } k\in\mathbb{K}\setminus\{0\} \text{ が存在して } \boldsymbol{y}'=k\boldsymbol{y}$$

   (1) $\simeq$ は同値関係であることを示せ．
   (2) $i\colon S^n_{\mathbb{K}}\to\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ を包含写像とし，$j\colon\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}\to S^n_{\mathbb{K}}$ を $j(\boldsymbol{x}):=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ で定義する．次のことを示せ．
      (a) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in S^n_{\mathbb{K}},\ \boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}'$（つまり，ある $k\in\mathbb{K}$ $(|k|=1)$ が存在して $\boldsymbol{x}'=k\boldsymbol{x}$）ならば $i(\boldsymbol{x})\simeq i(\boldsymbol{x}')$
      (b) $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\in\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{y}\simeq\boldsymbol{y}'$ ならば $j(\boldsymbol{y})\sim j(\boldsymbol{y}')$
      (c) i,j は連続写像 $i\colon\mathbb{K}P^n\to(\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\})/\simeq,\ j\colon(\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\})/\simeq\to\mathbb{K}P^n$ を導き，これらは互いに逆写像である
4. $a_1,\dots,a_{n+1}\neq0$ に対し，

$$M:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\sum_{1\le i\le n+1}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1\right\}$$

   に，$a_1,\dots,a_{n+1}\neq0$ によらず S^n と微分同相 (diffeomorphic) となるような n 次元 C^∞ 級多様体の構造を定めよ．
5. M を $\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を局所座標系とする C^∞ 級多様体とする．各 U_α ならびに $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ は C^∞ 級多様体の開集合なので，演習問題 1-1 (1) により C^∞ 級多様体となる．$\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$ は C^∞ 級写像であることを示せ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 講義では多様体の最初の例として球面と射影空間を扱いました．球面は，いわゆる「(2 次元）球面」を思い描けば，だいたい正しいイメージであると言っていいと思いますが，射影空間はどのようなものかすぐにはわからないと思います．講義では球面の商空間として定義しましたが，問題 3 のように $\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ の商空間と微分同相で，後者を定義にする場合も多いと思います．$(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n_{\mathbb{K}}$ が代表する同値類を $[x_1:\cdots:x_{n+1}]$（**斉次座標**）と書いたりしますが，これは定義に現れる同値関係 $\boldsymbol{x}\sim k\boldsymbol{x}$, つまり $(x_1,\dots,x_{n+1})\sim(kx_1,\dots,kx_{n+1})$ の気持ちをうまく表した書き方だと思います．射影空間の定義はすべての次元で同じように行われますが，今後の講義で示すように，次元ごとに多様な姿をしている感じがします．こういった例を通して，多様体という図形を「さわる」感覚が身につけばよい，と思います．「Euclid / Hermite 空間内の 1 次元部分空間の集合」という突拍子もないものが幾何学の対象になる，というのは驚くべきことのように思えます．

(ii)「M は多様体である」というのは厳密には不正確な書き方で，「M は $\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を局所座標系とする多様体の構造を持つ」のような言い方が正確です．位相空間 M と，その上の局所座標系の組が多様体である，というわけです．実際，ある 1 つの位相空間が複数個の局所座標系を持つことは普通のことで，問題 2 に示したのは球面の局所座標で立体射影ではないものの例です．ただし，問題 2 の局所座標系は立体射影によるものと「適合する」

ようなものです．つまり，立体射影による座標系に問題 2 の座標の一部を付け加えたとしても，その結果はやはり局所座標系になっています（確かめてみてください）．

M 上の局所座標系が 1 つ与えられたとき，それと「適合する」局所座標を**すべて**付け加えてできる局所座標を，**極大** (maximal) 局所座標系とよびます．極大な局所座標系は，考えられる限りの座標をすべて含むので，例えばある関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であることを示すのは面倒ですが（局所座標の数が多いから），一方で局所的に何か考えたいときに都合の良い座標を取ることができて，理論的には便利なこともあります．通常は「M は多様体である」と言うときには，何らかの局所座標系から得られた極大な座標系を考えることが多いと思います．上に述べた，球面の 2 種類の局所座標系は，同一の極大な座標系の一部であるという意味で同一のものです．

「ある位相空間上に，互いに適合しないような 2 つの極大な局所座標系が存在することがあるか」という問題が考えられますが，これは J. Milnor によって 1956 年に肯定的に解かれました．Milnor は S^7 上に，立体射影により得られる局所座標系（を含む極大なもの）とは互いに適合しない局所座標系を構成しました．つまり Milnor は，S^7 と位相空間として同相だが多様体として微分同相でないような多様体を構成したことになります．このような局所座標系を**異種微分構造** (exotic differential structure) などとよびます．現在ではいろいろな多様体について異種微分構造の存在が知られていますが，一方で S^4 については未解決であったり，まだ考えることは多くあるようです．