

1.  $\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  (和の記号は形式的なもの) 上に次の演算で  $\mathbb{R}$  ベクトル空間の構造を入れる :

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) := (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k,$$

$$t(a + bi + cj + dk) := ta + tbi + tcj + tdk$$

さらに  $\mathbb{H}$  上の積を, 結合的かつ上の和とスカラー倍については分配的で,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

をみたとすように定める.  $\mathbb{H}$  を **4 元数体** (quaternion) とよぶ.

- (1)  $\mathbb{H}$  は体をなすことを示せ. また  $ji = -ij, kj = -jk, ik = -ki$  を示せ. (従って  $\mathbb{H}$  は非可換体である)
- (2)  $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$  を自然に  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  と同一視し,  $x, y \in \mathbb{H}$  に対し  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^4$  の Euclid 内積で定義する.  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  とおくと,  $x, y \in \mathbb{H}$  に対し  $|xy| = |x| \cdot |y|$  であることを示せ.
- (3)  $S^3 \approx \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$  を示せ. ただし  $\mathbb{H}$  の位相は自然な全単射  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$  が同相となるようなものである.
- (4)  $\mathbb{H}$  上の積について,  $S^3$  は部分群をなすことを示せ. この積が定める写像  $S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$  は連続であることを示せ.
- (5)  $S^3$  上の同値関係

$$x \sim x' \stackrel{\text{def}}{\iff} x' = \pm x$$

について,  $x \sim x'$  かつ  $y \sim y'$  ならば  $xy \sim x'y'$  であることを示せ. これにより  $\mathbb{R}P^3 := S^3/\sim$  上にも積が誘導され,  $\mathbb{R}P^3$  は群となることを示せ. この積が定める写像  $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  は連続であることを示せ.

2.  $U_{\pm} := \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \neq \mp 1\}$  とおくと  $S^1 := U_+ \cup U_-$  である.  $\varphi: U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^1$  を

$$\varphi_{\pm}(x_1, x_2) := \frac{x_1}{1 \pm x_2}$$

で定義すると,  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$  は  $S^1$  の局所座標系であった (立体射影).

また  $V_i := \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_i \neq 0\}$  とおくと  $\mathbb{R}P^1 = V_1 \cup V_2$  である.  $\psi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^1$  を

$$\psi_1([x_1 : x_2]) := \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi_2([x_1 : x_2]) := \frac{x_1}{x_2}$$

で定義すると,  $\{(V_i, \psi_i)\}_{i=1,2}$  は  $\mathbb{R}P^1$  の局所座標系であった (講義のときは記号を変えていることに注意).

$F_1 := \psi_1^{-1} \circ \varphi_+ : U_+ \rightarrow V_1, F_2 := \psi_2^{-1} \circ \varphi_- : U_- \rightarrow V_2$  はともに同相である.  $U_+ \cap U_-$  上  $F_1 = F_2$  であることを示せ. このことにより定義される写像  $F: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ ,

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & x \in U_+ \\ F_2(x) & x \in U_- \end{cases}$$

は微分同相写像であることを示せ. 従って多様体としては  $\mathbb{R}P^1$  は  $S^1$  と同一視される.

3. 前問と同様にして, 微分同相写像  $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$  を構成せよ.

(提出の必要はありません)

補足.

- (i) 射影空間は球面の次に基本的な多様体といえるもので, 幾何に関係することを学んでいると随所に現れます. 射影空間についてはいろいろなことがわかっていますが, それでも出会う度に様々な側面が見える, 非常に興味深い多様体であると思います. 今回の問題 1 では例として  $\mathbb{R}P^3$  を扱いました. これは 4 元数体  $\mathbb{H}$  内の単位球面  $S^3$  の群構造を引き継いで群になっているような多様体で, しかも積  $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  や逆元を取る写像

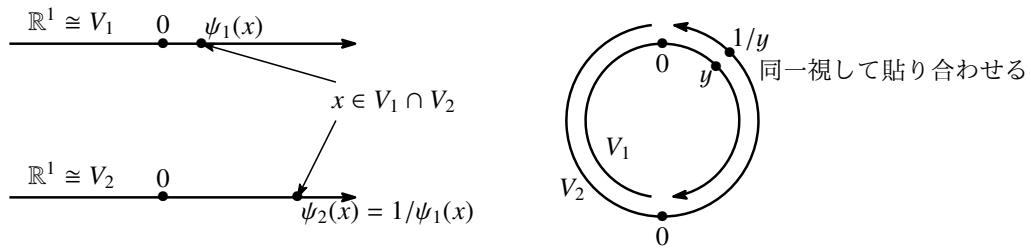


図1 2つの  $\mathbb{R}^1$  の張り合わせ

$\mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  はどちらも連続, 実は  $C^\infty$  級です. このような多様体を **Lie 群 (Lie group)** とよびます. 実はさらに,  $\mathbb{R}P^3$  は  $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_3\}$  と同微分同相になっていて, 微分同相写像  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$  として群の同型でもあるものを取り取することもできます. つまり,  $\mathbb{R}P^3$  は Lie 群としても  $SO(3)$  と同型です.

- (ii) 多くの多様体や位相空間は球面に何らかの操作を施して得られます. この意味で, 球面はいろいろな多様体, それに準ずる位相空間を構成する際の基本的な「部品」のようなものです. 射影空間もその一例ですが, 実は問題 2, 3 で見るように, 1次元射影空間は球面そのものになっています.

問題 2 の意味を考えてみます.  $\mathbb{R}P^1 = V_1 \cup V_2$  ですが,  $V_1$  と  $V_2$  をいったん独立な位相空間と考えておき,  $x \in V_1$  と  $x \in V_2$  (もともと  $\mathbb{R}P^1$  の同じ元だったもの) を同一視して (「貼り合わせて」) 得られる商空間とみなします. 一方で  $\psi_1, \psi_2$  により  $V_1 \cong \mathbb{R}^1 \cong V_2$  ですから,  $\mathbb{R}P^1$  は 2 つの  $\mathbb{R}^1$  を何らかの方法で「貼り合わせた」商空間です. 実際には  $i = 1, 2$  に対し  $\psi_i(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$  なので (確かめてください),  $\mathbb{R}P^1$  は 2 つの  $\mathbb{R}^1$  を, 原点以外のところで貼り合わせて得られます.  $x \in V_1 \cap V_2$  は  $\psi_1(x) \in V_1 \cong \mathbb{R}^1, \psi_2(x) \in V_2 \cong \mathbb{R}^1$  と同一視されますが, 定義から  $\psi_1(x) = 1/\psi_2(x)$  です. つまり「貼り合わせ」の方法は, 一方の  $\mathbb{R}^1$  の元  $y \neq 0$  と, もう一方の  $\mathbb{R}^1$  の  $1/y$  を同一視することで与えられます. これを図示したのが図 1 です. このような貼り合わせにより円周ができることが見て取れるでしょうか.

$\mathbb{R}P^1$  は  $S^1$  の商空間でしたから, 自然な射影  $p: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  が存在し,  $p^{-1}([x]) = \{\pm x\}$  です. つまり  $p$  は 2 対 1 の写像です. よって合成  $F^{-1} \circ p: S^1 \rightarrow S^1$  は恒等写像ではなく, 実際は

$$(F^{-1} \circ p)(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

であることがわかります. 確かめてみてください.

- (iii) 問題 3 も同様です. 2 つの  $\mathbb{C}$  を用意し, 一方の  $z \neq 0$  と, もう一方の  $1/z$  を同一視して貼り合わせたものが  $\mathbb{C}P^1$  であることがわかり, このような貼り合わせでできる図形は  $S^2$  です.

$\mathbb{C}P^1$  は  $S^3$  の商空間でしたから, 自然な射影  $p: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  があります. 微分同相  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$  を合成すると, 写像  $S^3 \rightarrow S^2$  が得られます. これは **Hopf 写像** と呼ばれ, とても重要な写像です.

- (iv) 以上のようなことは 1次元に限る話で,  $\mathbb{R}P^n$  ( $n \geq 2$ ) は球面とは同相になりません. それは例えばホモロジー群を計算すればわかります.