多様体論 演習問題 4（2019 年 11 月 5 日）

担当：境 圭一

1. $M_{m,n}(\mathbb{R}) := \{$ 実数を成分とする $m\times n$ 行列 $\}$ とし，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0)$ とおく．
   (1) $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を示せ．
   (2) $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の第 i 列を $\boldsymbol{a}_i$ とおく $(i = 1,2)$. $\boldsymbol{a}_1$ と x 軸の正の向きのなす角度を $\theta \in (-\pi,0)\cup(0,\pi)$ とする．$\varphi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\})\times(\mathbb{R}^2\setminus(x \text{ 軸}))$ を
   $$\varphi(A) := (\boldsymbol{a}_1, R(-\theta)\boldsymbol{a}_2),\qquad \text{ただし } R(\alpha) := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
   により定義するとき，φ は微分同相写像であることを示せ．

2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ とおく．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \approx S^1\times\mathbb{R}^2$（同相）であることを，以下の手順で示せ．
   (1) $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の第 i 列を $\boldsymbol{a}_i$ とおく $(i = 1,2)$. $\det A$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が張る平行四辺形の符号つき面積に等しいことを示せ（「符号つき」の意味も併せて考えよ）．
   (2) $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の第 i 列を $\boldsymbol{a}_i$ とおく $(i = 1,2)$.
   $$L_A := \left\{t\frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} + R(\pi/2)\frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}^1\right\}$$
   ($R(\alpha)$ は前問 (2) のもの) とする．$\boldsymbol{a}_2 \in L_A$ を示せ．
   (3) $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し，
   $$\varphi_A\colon \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\cong} L_A,\quad \varphi_A(t) := t\frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} + R(\pi/2)\frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}$$
   により L_A を $\mathbb{R}^1$ と同一視する．$f\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^1$ を
   $$f(A) := (\boldsymbol{a}_1,\ \varphi_A^{-1}(\boldsymbol{a}_2))$$
   で定義する．f は同相写像になることを示せ．
   (4) $\psi\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to S^1\times\mathbb{R}^1$ を
   $$\psi(r\cos\theta,\ r\sin\theta) := ((\cos\theta,\ \sin\theta),\ \log r)$$
   で定義する．ψ は同相写像であることを示せ．

3. $U(n) := \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid U^*U = E_n\}$ を n 次**ユニタリ群** (n-th unitary group) とよぶ．ただし $U^* := {}^t\overline{U}$（共役転置）である．
   (1) $f\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ を
   $$X = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix} \text{ のとき } f(X) := (|\boldsymbol{x}|^2-1,\dots,|\boldsymbol{x}_n|^2-1,\ (\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j)_{1\le i<j\le n})$$
   で定義する．ただし $\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j$ などは Hermite 内積である．$U(n) = f^{-1}(\mathbf{0})$ を示せ．
   (2) $U(n)$ は C^∞ 級多様体であることを示せ．また $\dim U(n)$ を求めよ．
   (3) $U(1) \cong S^1$ を示せ．

4. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を $[\theta]$ と表す（従って $[\theta+2\pi] = [\theta]$ である）．$T^2 := S^1\times S^1$ とおく．
   (1) $U_+ := \{([\alpha],[\beta]) \in T^2 \mid [\alpha] \neq [-\pi/2]\}$, $U_- := \{([\alpha],[\beta]) \in T^2 \mid [\alpha] \neq [\pi/2]\}$ とおく．$U_\pm \in \mathcal{O}(T^2)$, $U_+\cup U_- = T^2$ を示せ．
   (2) $\varphi_\pm\colon U_\pm \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する：$([\alpha],[\beta]) \in U_+$ のとき $[\alpha]$ の代表元を $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ から取り，$([\alpha],[\beta]) \in U_-$ のとき $[\alpha]$ の代表元を $-\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ から取って
   $$\varphi_\pm([\alpha],[\beta]) := \left(\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{5}{4}\right)(\cos\beta,\ \sin\beta)$$
   とおく．$A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |\boldsymbol{x}| < 2\}$ とおくとき $\varphi_\pm(U_\pm) = A$ であり，$\varphi_\pm\colon U_\pm \to A$ はともに同相で，$\varphi_+(U_+\cap U_-)$ 上 $\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}$ は C^∞ 級であることを示せ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 多様体に限らず，何らかの数学的対象について考えているとき，それについて理解するには，具体例をなるべくたくさん知っているほうが有利です．具体例を作るには「既に与えられたものから新しいものを作る」という方法が有効であることが多いと思います．例えば

(a) 部分集合を取る

(b) 直積を取る

(c) 何らかの同値関係に関する商集合を取る

というのが典型的な戦略です．(a), (c) に関しては何でもよいわけではなく，何らかの条件が課される場合がほとんどです．多様体の場合は，(a) については「開集合を取る」ことにより，既知の多様体から新たな多様体が作られます．講義では $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ を例に取りました．ある種の行列全体が「多様体」という幾何学的対象になるというのは，言われてみないとなかなか想像できないことではないかと思います．こういった思いがけない例がたくさんあるのが多様体論の魅力の 1 つのように思えます．

上記の (b) に関しては，講義ではトーラスを例に挙げました．問題 4 のように，局所座標系を直接与えることももちろん可能です．

なお，上記の (c) のようなやり方によっても多様体の例を作ることができます．それは別の機会に譲りたいと思います．気になる人はお尋ねください．

(ii) さらなる多様体の例の構成方法として，講義では陰関数定理による方法を挙げました（証明は次回やります）．この方法により，例えば $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ や $O(n)$ といった，ある種の行列のなす群が多様体になることがわかりますが，それらが具体的にどんな形をしているのかはすぐには想像できません．簡単な例を問題 1, 2, 3 に挙げました．これらが一般にどんな形をしているかは興味深いところです．