多様体論 演習問題 5（**2019** 年 **11** 月 **19** 日）

担当：境 圭一

1. $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ を C^∞ 級写像とし，$M := \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{y})\}$ とおく．M は n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ．（ヒント：$f\colon \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^k$ を $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x} - g(\boldsymbol{y})$ で定義すれば $M = f^{-1}(\mathbf{0})$ である）
2. C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\mathrm{grad}(f)(p) := \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Bigr)$$

で定義し，f の**勾配ベクトル場** (gradient vector field) とよぶ.

(1) $p \in \mathbb{R}^n$ における f の Jacobi 行列 $Df(p)$ は $\mathrm{grad}(f)(p)$ に他ならないことを確かめよ.

(2) $M := f^{-1}(0)$ とおく．任意の $p \in M$ に対し $\mathrm{grad}(f)(p) \neq \mathbf{0}$ のとき，M は $n-1$ 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ.

(3) $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) := |\boldsymbol{x}|^2 - 1$ で定義するとき，$M := f^{-1}(0)$ は n 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ. M はどのような多様体か？

3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2)$ で定義し，$M := f^{-1}(0)$ とおく.

(1) M は 2 次元 C^∞ 級多様体（**曲面** (surface) とも呼ぶ）の構造を持つことを示せ.

(2) $(x,y,z) \in M$ とする．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとき，$(r-2)^2 + z^2 = 1$ が成立することを示せ．M はどのような多様体か？

4. $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x_1,\dots,x_6) := (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1,\ x_1x_2-x_6,\ x_2x_3-x_4,\ x_3x_1-x_5)$ で定義する．$M := f^{-1}(\mathbf{0})$ は 2 次元 C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ.

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 問題 1 の M は，$k=1$ のときはいわゆる「関数 $x = g(\boldsymbol{y})$ のグラフ」です．問題 1 は「関数のグラフ（の一般化）は多様体となる」ということを述べていて，その（局所）座標系は $\mathbb{R}^n \to M, \boldsymbol{y} \mapsto (g(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$ で与えられます. $f\colon \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^k$ の**零点集合** $M = f^{-1}(\mathbf{0})$ については，すべての $p \in M$ において $\operatorname{rank} Df(p) = k$ なら，陰関数定理により「p の近くで M は**局所的に**関数のグラフである」ことが示されます．M が多様体となることの本質的な理由はここにあると思います.

(ii) 多様体の局所座標系を具体的に与えるのは，多様体ごとに工夫が必要で，そう簡単ではありません．行列の階数の計算のほうがずっと容易で，その点で陰関数定理を使った議論は便利です．既に扱った多様体も，問題 2, 3 のように陰関数定理により多様体となることを再確認できます．これらと同様の議論は「幾何入門」（ベクトル解析）でもやりました.

一方で，陰関数定理による議論では，具体的にどのような局所座標系を取っているか見えづらいので，局所的な議論をしたいときには不便かもしれません.

(iii) 問題 4 の M は Veronese 曲面と呼ばれます．$p\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ を $p(x_1,\dots,x_6) := (x_2^2 - x_1^2,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$ で定義すると，$p|_M\colon M \to p(M)$ は同相で（確かめてみてください），従って M は $\mathbb{R}^4$ 内の 2 次元多様体（曲面）ともみなせます．実は $M \cong \mathbb{R}P^2$ です．このことは後で示します.