多様体論 演習問題 6（2019 年 11 月 26 日）

担当：境 圭一

1. $p \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ とする．p の開近傍 U で定義された C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対し，f の p における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分** $\partial_{p,\boldsymbol{v}}(f)$ を次のように定義する：C^∞ 級写像 $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ で $\gamma(0) = p$, $\dfrac{d\gamma}{dt}(0) = \boldsymbol{v}$ となるものを取り，

$$\partial_{p,\boldsymbol{v}}(f) := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0).$$

この定義が well-defined であることを示せ．つまり，$\gamma_i\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$ が共に上の条件をみたすとき

$$\frac{d(f \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \gamma_2)}{dt}(0)$$

が成り立つことを示せ．

2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とし，任意の $p \in M := f^{-1}(0)$ において $\mathrm{grad}(f)(p) \neq \mathbf{0}$ であるとする．
   (1) $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ は C^∞ 級写像で $\gamma(0) = p$, $\dfrac{d\gamma}{dt}(0) \neq \mathbf{0}$ をみたすものとする．$\dfrac{d\gamma}{dt}(0)$ と $\mathrm{grad}(f)(p)$ は直交することを示せ．
   (2) (1) のような γ を用いて $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\gamma}{dt}(0)$ の形に書ける $\boldsymbol{v}$ を，p における M の接ベクトルとよぶ．その全体のなす集合 H は $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元部分ベクトル空間で

$$H = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i = 0\Big\}$$

   をみたすことを示せ．
   (3) $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標 $x_1, \ldots, x_n$ を使って，

$$T_p\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \quad \sum_i a_i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

   により $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ とみなす．$\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ を包含写像とし，$p \in M$ とするとき，$d\iota_p\colon T_pM \to T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ は単射で，その像は (2) の H に等しいことを示せ．

3. n 次元 C^∞ 級多様体 M 上の点 p のまわりの 2 つの局所座標 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ と $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ を取り，

$$\Phi := \psi \circ \varphi^{-1} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

とおく．$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上の座標を $x_1, \ldots, x_n$ とし，$i = 1, \ldots, n$ に対し $y_i = \Phi_i(x)$ とおいて $y_1, \ldots, y_n$ を $\psi(V)$ 上の座標とするとき，$i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(\varphi(p)) \Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)_p$$

が成り立つことを示せ．

4. M を C^∞ 級多様体とする．
   (1) $C^\infty(M) := \{C^\infty \text{級関数 } f\colon M \to \mathbb{R}\}$ は可換環の構造を持つことを示せ．
   (2) $p \in M$ における接空間 T_pM は $\mathbb{R}$ ベクトル空間の構造を持つことを示せ．

5. (1) $\mathrm{O}(n) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の，単位行列 $E_n \in \mathrm{O}(n)$ における（問題 2 の意味での）接空間 H は

$$H = \{X \in M_n(\mathbb{R}^n) \mid {}^tX + X = O\}$$

   であることを示せ．（注：この H を $\mathfrak{o}(n)$ と書くことが多い）
   ヒント：$\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{O}(n)$ で $\gamma(0) = E_n$ をみたすものを取ると，各 s に対し $\gamma(s) \in \mathrm{O}(n)$ だから ${}^t\gamma(s)\gamma(s) = E_n$．両辺を $s = 0$ で微分し積の微分公式を使う．
   (2) (1) と同様にして，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の E_n における接空間を求めよ．

(3) (1), (2) の多様体を G で表し，接空間 $T_{E_n}G$ の元 X, Y に対し，行列の積を用いて

$$[X, Y] := XY - YX$$

と定義する．$[X, Y] \in T_{E_n}G$ であることを示せ．また $X, Y, Z \in T_{E_n}G$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，次の等式を示せ．

(i) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$

(ii) $[Y, X] = -[X, Y]$

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = O$

（提出の必要はありません）

補足.

(i) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $M := f^{-1}(0)$ の各点 p で $\mathrm{grad}(f)(p) \neq \mathbf{0}$ をみたすとき，M は「$f = 0$ で定まる C^∞ 級多様体」であると言えます．この M について，$p \in M$ における M の**接ベクトル**や**接空間**は問題 1, 2 のように定義されます．この接空間は「f の p における Taylor 展開の 1 次以下の項 $= 0$」によって定まっています．この意味で，接空間は「M の 1 次近似」であると言えます．

(ii) 問題 1, 2 のような接ベクトルの定義は，多様体が入っている Euclid 空間がベクトル空間の構造を持つことによるものです．Euclid 空間の部分空間として定義される多様体の例は少なくありませんが，そうでない例もあります（典型的な例は射影空間です）．と言うより，多様体は本来は「各点のまわりが Euclid 空間と同相な位相空間」として定義されるべきもので，はじめから Euclid 空間に入っているとは仮定しないのが本来の姿です．そのような場合，問題 1, 2 のような接ベクトル・接空間の定義はもはや役に立ちません．そこで，M が Euclid 空間に入っている場合に接ベクトル $\boldsymbol{v}$ が「$\boldsymbol{v}$ 方向の微分」を定めたことを念頭に，「方向微分」そのものを接ベクトルとみなしてしまおう，というのが講義で見た接ベクトル・接空間の定義のアイデアです．問題 2 (3) が示すように，これらの定義は本質的に同一のものです．

(iii) $p \in M$ のまわりの局所座標を取れば，T_pM の基底として $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ を取れました．これは局所座標の取り方に依存し，一般的には「標準的な」局所座標というものはないので，T_pM の基底も「標準的な」ものはありません．座標の取り換えのもとで，基底は問題 3 のように変換されます．この問題の状況だと $y_k = \Phi_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ ということですが，この意味で「$y_k = \Phi_k$」のように見なして問題 3 の公式を見ると，だいたい「y を約分すれば両辺とも $\partial/\partial x_i$ だけが残る」というような形をしているように見えます．数学的には曖昧なことを言っていますが，この手の変換公式を間違えずに使うためには，このような見方はしばしば便利です．導関数の記号をうまく作ってくれた Leibniz らに感謝すべきです．

(iv) 多様体であると同時に群でもあり，群構造が C^∞ 級であるものを Lie 群と呼びました．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ などがその例です．Lie 群 G は単位元 e を含みますが，e における接空間 T_eG をしばしば $\mathfrak{g}$ と書き，G に対応する **Lie 環**と呼びます．Lie 環は Lie 群の群構造を「微分」したような代数構造を持ちます．詳細は代数の講義に譲りたいと思いますが，Lie 環はいろいろな場面に登場し，極めて重要であると思います．