多様体論 演習問題 7（2019 年 12 月 3 日）

担当：境 圭一

1. (1) L, M, N を C^∞ 級多様体とし，$f\colon L \to M$ と $g\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．$p \in L, q := f(p) \in M$ に対し

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p \colon T_pL \to T_{g(q)}N$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) の状況で，f, g がともにはめ込みであるとき，$g \circ f$ もはめ込みであることを示せ．また，f, g がともに埋め込みであるとき，$g \circ f$ も埋め込みであることを示せ．

(3) M を C^∞ 級多様体とし，$\mathrm{id}_M\colon M \to M$ を恒等写像とする．$p \in M$ に対し

$$d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$$

が成り立つことを示せ．

(4) M, N を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to N$ を微分同相写像とする．$p \in M$ に対し，$df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ は同型であることを示せ．（特に微分同相写像は埋め込みでもあることがわかる）

2. (1) $x \in \mathbb{R}$ に対し $u := 1 + x^2$ とおき，$f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) = \Big(x - \frac{2x}{u}, \frac{1}{u}\Big)$$

で定義する．f ははめ込みであることを示せ．像 $f(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．また，$f(p) = f(q)$ かつ $p \neq q$ となるような $p, q \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

(2) $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し $u := (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)$ とおき，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(x_1, x_2) := \Big(x_1 - \frac{2x_1}{u},\ x_2,\ \frac{1}{u},\ \frac{x_1x_2}{u}\Big)$$

で定義する．f ははめ込みであることを示せ．また，$f(p) = f(q)$ かつ $p \neq q$ となるような $p, q \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

(3) n を自然数とする．$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $u := (1 + x_1^2)\cdots(1 + x_n^2)$ とおき，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ を

$$f(x_1, \dots, x_n) := \Big(x_1 - \frac{2x_1}{u},\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \frac{1}{u},\ \frac{x_1x_2}{u},\ \dots,\ \frac{x_1x_n}{u}\Big)$$

で定義する．f ははめ込みであることを示せ．また，$f(p) = f(q)$ かつ $p \neq q$ となるような $p, q \in \mathbb{R}^n$ を求めよ．

3. N を C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級写像 $f\colon S^1 \to N$ は, C^∞ 級写像 $\overline{f}\colon \mathbb{R}^1 \to N$ で, 任意の $x \in \mathbb{R}^1$ に対し $\overline{f}(x{+}1) = \overline{f}(x)$ をみたすものと同一視できることを示せ．また，f がはめ込みであることと，$\overline{f}$ がはめ込みであることは同値であることを示せ．

4. $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(x, y, z) := (x^2 - y^2,\ yz,\ zx,\ xy)$$

で定義する．

(1) f ははめ込みであることを示せ．また「$f(p) = f(q) \iff p = \pm q$」が成立することを示せ．

(2) f は埋め込み $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ を導くことを示せ．

5. $f\colon \mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^{n+1}$ を $f([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) := [x_1 : \cdots : x_{n+1} : 0]$ で定義する．f は埋め込みであることを示せ．

6. $(\cos 2\pi\theta,\ \sin 2\pi\theta) \in S^1$ を $[\theta]$ で表す．$\alpha \in \mathbb{R}$ とし，$f\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ を

$$f(\theta) := ([\theta], [\alpha\theta])$$

で定義する．

(1) $\alpha \in \mathbb{Q}$ のとき，f は埋め込み $\widetilde{f}\colon S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$ を導くことを示せ．

(2) $\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき，f ははめ込みであり，単射でもあるが，埋め込みではないことを示せ．

7. 次の写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ははめ込みでないことを示せ．これらの写像の像を図示せよ．

(1) $c(x,y) := (x, y^2, y^3)$

(2) $w(x,y) := (x^2, y, xy)$

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 多様体の接空間は，多様体の「1 次近似」でした．多様体間の C^∞ 級写像 f が接空間に導く写像 df も，f の「1 次近似」と呼べるものです．実際，局所座標を与えて f を（局所的に）Euclid 空間の間の写像とみなしたとき，接空間の基底 $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)\right\}_{1 \le i \le n}$ に関して，df は f の Jacobi 行列で表現されます．これが単射であるときに f を**はめ込み** (immersion) と呼びますが，これは f が 1 次近似の意味で「つぶれていない」ことを意味します．
「つぶれている」，つまり微分が単射になっていない点（**特異点**と呼ぶ）を持つ写像の例を問題 7 に 2 つ挙げました．(1) は「カスプ」(cusp), (2) は「Whitney の傘」(Whitney umbrella) などと呼ばれる特異点を持つ写像です．描画ソフトで絵を描くこともできると思いますし，Google 等で検索しても画像を見られると思います．

(ii) 問題 2 のはめ込みは Whitney によるものです．各 n に対し，p, q の組は順序を除いてちょうど 1 組存在します．従って f は埋め込みではなく，自己交差を 1 つだけ持つはめ込みです．「$\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^{2n}$ 内で自己交差を 1 つ持つ」というのは想像しにくいと思いますが，$n = 1$ のとき（このときは $\mathbb{R}^2$ 内の曲線）の様子が，一般の次元での様子を想像するのに役立ちます．
この f は，適当なはめ込み $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ を局所的にこの f で変形することにより自己交点を 1 つ増やし，それにより自己交差の数を偶数個にして，正則ホモトピーによる変形で自己交差を打ち消す，という技法 (Whitney trick) に使われます．これにより M^n を $\mathbb{R}^{2n}$ に埋め込めることが証明されます．

(iii) $p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$ を $p(x) := (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$ で定義すると，問題 3 の f と $\overline{f}$ の関係は次の可換図式の通りです：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^1 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\overline{f}"] & \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

f が先に与えられていれば $\overline{f} := f \circ p$ とおけばよく，**周期的な** $\overline{f}\colon \mathbb{R}^1 \to N$ が先に与えられているときは，$f([\theta]) := \overline{f}(\theta)$ が（代表元 θ の選び方によらず）well-defined になります．$\overline{f}$ を f の**持ち上げ** (lift) などと呼ぶこともあります．
$N = \mathbb{R}^n$ のとき，$\overline{f}$ がはめ込みであるための条件は，任意の $x \in \mathbb{R}^1$ に対し $\dfrac{d\overline{f}}{dx}(x) \neq \mathbf{0}$ であることでした．従って，任意の $[\theta] \in S^1$ に対し $\dfrac{df}{d\theta}(\theta) \neq \mathbf{0}$ であれば，f もはめ込みになります．

(iv) 問題 4 の埋め込み $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ は，演習問題 5-4 で取り上げた Veronese 曲面を $\mathbb{R}^4$ に射影したものと一致します．これにより Veronese 曲面が実は $\mathbb{R}P^2$ であることがわかります．この問題により $\mathbb{R}P^2$ は $\mathbb{R}^4$ に埋め込めますが，一方で $\mathbb{R}P^2$ は $\mathbb{R}^3$ には埋め込めないことが知られています（例えば，松本幸夫先生の「多様体の基礎」（東大出版）の付録 B にわかりやすい証明があります）．よって $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を許容する n の最小値は 4 であることがわかります．

(v) はめ込みであって，像への同相写像になっているものを埋め込みと呼びます．単射であるようなはめ込みでも埋め込みとは限らない，という例としてしばしば挙げられるのが問題 6 の写像です．α が無理数であるとき，任意の $f(\theta)$ のトーラス内での開近傍 U をどんなに小さくとっても，U は $f(\theta'), |\theta - \theta'| > 1$ の形の点を（無限個）含むことが示され，従って $\mathbb{R}^1$ の連結な開区間は $f(\mathbb{R}^1)$ の開集合にうつりません．すなわち，逆写像 f^{-1} は連続になりません．詳細は松島与三先生の「多様体入門」（裳華房）の §10 などをご覧ください．