多様体論 演習問題 8（2019 年 12 月 17 日）

担当：境 圭一

1. N を C^∞ 級多様体とし，$M \subset N$ を部分多様体とする．
   (1) N の局所座標系 $\{V_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を
   $$\psi_\alpha(V_\alpha \cap M) = \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \psi_\alpha(V_\alpha)\}$$
   となるよう選び，$U_\alpha := V_\alpha \cap M, \varphi_\alpha := \psi|_{U_\alpha}$ とおくとき，$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ は M の局所座標系を定めることを示せ．
   (2) 包含写像 $\iota\colon M \to N$ は埋め込みであることを示せ．
2. $f\colon \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^k$ は C^∞ 級写像で，任意の $p \in M := f^{-1}(\mathbf{0})$ において $\operatorname{rank} Df(p) = k$ であるものとする（従って M は n 次元 C^∞ 級多様体である）．M は $\mathbb{R}^{k+n}$ の部分多様体であることを示せ．
3. N を C^∞ 級多様体とし，$M, M_1, M_2 \subset N$ を部分多様体とする．
   (1) 任意の $f \in C^\infty(N)$ に対し，$f|_M \in C^\infty(M)$ であることを示せ．
   (2) 任意の $p \in M$ に対し，T_pM は T_pN の部分ベクトル空間であることを示せ．
   (3) 任意の $p \in M_1 \cap M_2$ に対し $T_pN = T_pM_1 + T_pM_2$ が成立するとき $M_1 \cap M_2 = M_1 \pitchfork M_2$ と書き，M_1 と M_2 は**横断的** (transverse) に交わるという．$M_1 \pitchfork M_2$ は N の部分多様体であることを示せ．また，$\dim(M_1 \pitchfork M_2)$ を $\dim N, \dim M_1, \dim M_2$ を用いて表せ．

（提出の必要はありません）

補足． 講義でやったことと問題 1 (2) より，$f\colon M \hookrightarrow N$ が埋め込みであることと，$f(M) \subset N$ が部分多様体であることは同値です．よって埋め込み $f\colon M \hookrightarrow N$ とは「M を N の部分多様体として実現する写像」であるということができます．
問題 2 により，球面や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ などは自然に Euclid 空間の部分多様体になっています．そうでない多様体の例としては射影空間 $\mathbb{K}P^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) がありました．しかし講義で見たように，これらも Euclid 空間へ埋め込むことは可能で，従って Euclid 空間の部分多様体とみなすことはできます．Euclid 空間に入っていると扱いやすくなりそうな感じがするかもしれませんが，必ずしもそうではありません．例えば $\mathbb{R}P^2$ は演習問題 7-4 により $\mathbb{R}^4$ の部分多様体とみなすことができ，何らかの写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を使って $\mathbb{R}P^2 = f^{-1}(0)$ とみなすことができるはずです．しかしそのような f を求められるかは不明で，求められたとしても扱いやすいものかどうかもわかりません．また「$\mathbb{R}^3$ 内の 1 次元部分ベクトル空間の集合」という $\mathbb{R}P^2$ の本来の意味はまったく見えなくなってしまいます．一方で，Euclid 空間に埋め込むことにより，接空間の意味がわかりやすくなるという利点はあるかもしれません（演習問題 6-2 参照）．