多様体論 演習問題 9（2019 年 12 月 24 日）

担当：境 圭一

1. $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2)$ を

$$f_0(x, y) := x^2 + y^2, \quad f_1(x, y) := -x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) := -x^2 - y^2$$

で定義する．f_i は $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ を臨界点に持つことを示せ．また $\mathbf{0}$ は指数 i の非退化臨界点であることを示せ．関数 $z = f_i(x, y)$ のグラフを描け．

2. $S^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$, $p_\pm := (0, \dots, 0 \pm 1) \in S^n$（複合同順，以下同様），$V_\pm := S^n \setminus \{\mp p\}$ とする．$\boldsymbol{x} \in V_\pm$ に対し，$p_\mp$ と $\boldsymbol{x}$ を通る $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の直線上で第 $n+1$ 座標が 0 の点を $(\varphi_\pm(\boldsymbol{x}), 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と書くと，$\varphi_\pm\colon V_\pm \to \mathbb{R}^n$ が定まる．
   (1) この $\varphi_\pm$ は S^n の局所座標系を定めることを示せ．
   (2) $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) := x_1$ で定める．f は C^∞ 級であることを示せ．
   (3) f は $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ を臨界点に持つことを示せ．
   (4) (3) の臨界点は非退化であることを示せ．その指数を求めよ．

3. $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta$ とおくとき $x^2 + (r-2)^2 = 1\}$ とおく．
   (1) T を図示せよ．
   (2) $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\psi(s, t) := (\cos s,\ (2 + \sin s)\cos t,\ (2 + \sin s)\sin t)$ で定める．$\psi(s, t) \in T$ を示せ．
   (3) $V_i \subset \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を

$$V_1 := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi), \quad V_2 := (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi), \quad V_3 := (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi), \quad V_4 := (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$$

   で定める．$\psi|_{V_i}$ は像への同相であることを示せ．$U_i := \psi(V_i)$, $\varphi_i := (\psi|_{V_i})^{-1}$ とおくとき，$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,4}$ は T の局所座標系を定めることを示せ．
   (4) $f\colon T \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) := z$ で定める．f の臨界点を求めよ．これらはすべて非退化であることを示し，その指数を求めよ．

4. M を C^∞ 級多様体とし，$p \in M$ とする．
   (1) p のまわりの局所座標 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ で，$\varphi(p) = \mathbf{0}$ であるものが存在することを示せ．（ヒント：適当に局所座標 $\psi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を取り $\varphi := \psi - \psi(p)$ とおく）
   (2) p のまわりの局所座標を (1) のように取る．$f \in C^\infty(U)$ に対し $F := f \circ \varphi^{-1}$ とおくとき，$x \in \varphi(U)$ に対し

$$F(x) = F(\mathbf{0}) + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{0}) x_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i, j \le n} h_{ij}(x) x_i x_j, \quad h_{ij}(\mathbf{0}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})$$

   となる $h_{ij} \in C^\infty(\varphi(U))$ が存在することを示せ．
   (3) (1) のような p のまわりの局所座標 $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ をもう 1 つ取り，V 上の座標を $y_1, \dots, y_n$ で表す．$\widetilde{F} := f \circ \psi^{-1}$, $H_f(p) = \Bigl(\dfrac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x_i \partial x_j}(p)\Bigr)_{i,j}$, $\widetilde{H}_f(p) = \Bigl(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(p)\Bigr)_{i,j}$ とおく．p が f の臨界点であるとき，合成写像の微分公式を使って

$$H_f(p) = {}^t\Bigl(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Bigr)_{i,j} \widetilde{H}_f(p) \Bigl(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Bigr)_{i,j}$$

   を示せ．p が非退化であるか否かは (1) のような局所座標の取り方によらないことを示せ．

5. 次の関数 $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフを描け．f_i は退化した臨界点を持つことを示せ．
   (1) $f_1(x, y) := x^3$
   (2) $f_2(x, y) := x^3 - 3xy$（ヒント：グラフを描くには平面 $y = k$ で切った切り口を考えるとよい）
   (3) $f_3(x, y) := -x^2 + y^3$

（提出の必要はありません）

補足．多様体論でやるべきこととして，埋め込み・はめ込み・部分多様体くらいまでは，誰がやってもだいたい共通だと思います．その先は，応用として何を見据えるかによって変わってくると思いますが，この講義では Morse 理論を取り上げることにしました．もっと基本的な概念，例えば接束 (tangent bundle) などについて学ぶことも重要なのですが，基礎的なことに終始すると話にオチがつかないので，少しまとまった理論を概観することにしました．あくまで概観であり，Morse 理論の何たるかをすべてお話できるわけではないので，興味を持たれた方は “Morse Theory” (J. Milnor, Princeton University Press) などでさらに学んでほしいと思います．また，多様体について学ぶべき基礎事項は他にもあります．必要に応じて，多様体論の教科書で補ってもらえればと思います．ここまでの講義で扱った内容が身についていれば，自習することも可能なはずです．

Morse 理論でやることは「多様体を簡単なピースに分割する」ということです．詳細は今後の講義で学びますが，概要を記しておきます．多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ を 1 つ用意し，$a \in \mathbb{R}$ に対し

$$M_a = f^{-1}((-\infty, a]) = \{p \in M \mid f(p) \le a\}$$

とおきます．a が f の最小値より小さければ $M_a = \emptyset$ で，a を大きくしていくと M_a はだんだん「大きく」なっていき，a が f の最大値になったところで $M_a = M$ となります．イメージとしては，多様体に水を注いでいくと，水の入った部分がだんだん増えていき，途中で（多様体の形に応じて）水の入った部分の形が変化していく，という感じです．Morse 理論の柱となる命題は次の 2 つです：

(i) $f^{-1}(a)$（水を注いだときの「水面」にあたる）が f の臨界点を越えない限り，M_a の形は（微分同相を除いて）不変である．

(ii) $f^{-1}(a)$ が臨界点を越える前後で M_a の形が変わり，臨界点が非退化であれば，その変化は「簡単なピース」を貼りつけることで実現される．

もう少し正確には，M のコンパクト性を仮定した上で，次のことが成り立ちます：

(i) $f^{-1}([a,b]) = M_b \setminus \operatorname{Int} M_a$ が f の臨界点を含まないなら $M_a \cong M_b$ である．

(ii) $f^{-1}([a,b])$ が臨界点をちょうど 1 つ含み，それが非退化で指数 λ ならば $M_b \cong M_a \cup (D^\lambda \times D^{n-\lambda})$ である．ただし $n = \dim M$, 自然数 m に対し $D^m := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$ で，和は

$$M_a \cap (D^\lambda \times D^{n-\lambda}) \subset \partial M_a, \quad M_a \cap (D^\lambda \times D^{n-\lambda}) \subset \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$$

が成り立つようなものである．

(ii) で貼りつけられた $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ を n 次元 λ **ハンドル** (handle) とよびます．これは λ に関係なく D^n と同相で，例えば $n = 1$ なら線分，$n = 2$ なら円板，$n = 3$ なら球体ですから，「簡単なピース」とよべるでしょう．λ は貼りつけ方に関係します．
多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ の臨界点がすべて非退化であるとき，f を **Morse 関数** (Morse function) とよびます．Morse 関数が与えられると，上の (i), (ii) により，多様体は「簡単なピース」であるハンドルのいくつかの和に分解されるわけです．このことは幅広い応用を持ちます．簡単なところでは，例えばハンドル分解により M のホモロジー群が容易に計算されます．

今回の問題 1 のグラフを M とし（つまり $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_i(x,y) = z\}$ とする），$f\colon M \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := z$ で定義します．$(x, y, f_i(x,y)) \mapsto (x,y)$ は M の（局所）座標系を定めますが，これについて f の臨界点は f_i の臨界点に一致していることがわかり，この f に対して上記 (ii) が本当に成り立っていることが確かめられます．M_a の形の変化をたどってみてください．また，これらのグラフと問題 3 の臨界点のまわりの様子を見比べてみてください．