多様体論 演習問題 10（2020 年 1 月 7 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 U 上定義された C^∞ 級写像 $A\colon U \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ で，任意の $q \in U$ に対し $A(q) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ が対称行列であるようなものが与えられたとする．このとき，必要なら U を小さく取り直すことで，C^∞ 級写像 $P\colon U \to \mathrm{O}(k)$ で，
$$\text{任意の } q \in U \text{ に対し } P(q)^{-1}A(q)P(q) = \mathrm{diag}(\lambda_1(q), \ldots, \lambda_k(q))$$
となるものが存在することを示せ．ただし diag は対角行列を表す．

   (2) (1) の P について，C^∞ 級写像 $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を $\Phi(\boldsymbol{x}) := P(\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}$ で定義する．ある開集合 $V \subset U$ が存在し，$\Phi\colon V \to \Phi(V)$ は微分同相写像であることを示せ．

2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $f(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2$ で定義する．$c \in \mathbb{R}$ に対し，$M_c := f^{-1}((-\infty, c]) \subset \mathbb{R}^n$ の概形を図示せよ．特に，$\epsilon > 0$ に対し，$M_\epsilon \setminus M_{-\epsilon}$ がどのような図形か考えよ．

（提出の必要はありません）

補足． Morse の補題は「補題」という名で知られますが，Morse 理論においては重要な位置を占めるもので，たいていの教科書では定理として扱われていると思います．証明は，対称行列が直交行列により対角化されることの証明を繰り返せばよく，問題 1 (1) の記号で言えば，k に関する帰納法で証明することができます．ただし，それを各 $q \in U$ で一斉に行えるか，というのは線形代数の議論だけからは必ずしも明らかでなく，途中で出てくる種々の直交行列が U 上いたるところ直交行列であるか，などは 1 つ 1 つチェックしていく必要があります．(2) は，もし $P(q) \in \mathrm{O}(k)$ が q に依存しなければ，Φ は線形変換ですから微分同相であることは明らかですが，$P(q)$ は一般的には q に依存するので，非自明な主張になっています．証明としては，$\mathbf{0}$ における Φ の Jacobi 行列を考え，逆写像定理を使うのがよいと思います．

問題 2 は Euclid 空間上の関数の問題ですが，Morse の補題より，多様体上の関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ の非退化臨界点の近傍への制限を考えているのと同じことです．演習問題 9-1 の一般次元への拡張にもなっています．$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を $F(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{n+1}$ で定義すると F は埋め込みで，$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体 $M := F(\mathbb{R}^n)$（これは F のグラフです）は $\mathbb{R}^n$ と微分同相です．さらに $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を $h(y_1, \ldots, y_{n+1}) := y_{n+1}$ で定義すれば，次の図式は可換です：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"', "\cong"] & \mathbb{R} \\ M \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

つまり $\mathbb{R}^n \cong M$ という同一視のもとで，f は第 $n+1$ 射影 h と同じものです．第 $n+1$ 座標を「高さ」とみなして，h を**高さ関数** (height function) と呼んだりもします．$M_c = f^{-1}((-\infty, c])$ は，M 上の点で「高さ c 以下」の点のなす部分集合です．12/24 の講義で扱った，トーラス上の高さ関数の状況を思い出してみてください．

M_c を本当の意味で「図示」することができるのは，もちろん $n \leq 3$ の場合に限ります．一般の n については，$n \leq 3$ の場合を手掛かりに想像し，状況がわかるように「仮想的に」図示するしかありません．講義でも S^n の絵だと言って S^2 の絵を描くことがしばしばありましたが，ああいった雰囲気です．