多様体論 演習問題 **11**（**2020** 年 **1** 月 **14** 日）

担当：境 圭一

1. $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ と $p \in \mathbb{R}^n$ に対し，c_p を X の積分曲線で $c_p(0) = p$ をみたすものとする．次の X に対し，c_p を求めよ．ただし (1)〜(3) では $n = 2$ とする．
   (1) $X = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$
   (2) $X = x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$
   (3) $X = (x_1 - x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$
   (4) $X = -\displaystyle\sum_{k=1}^{i} x_k \dfrac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=i+1}^{n} x_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, ただし $n \in \mathbb{N}, 0 \le i \le n$
2. (1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

   で定義する．f は C^∞ 級であることを示せ．

   (2) $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) + f(1-x) > 0$ であることを示せ．$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

   で定義すると，g は C^∞ 級で

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1 & x \ge 1, \end{cases}$$

   さらに $0 < x < 1$ のとき $g'(x) > 0$ をみたすことを示せ．

   (3) $h(x) := g(x-2)g(x+2)$ とおくと h は C^∞ 級で

$$h(x) = \begin{cases} 0 & |x| \ge 2, \\ 1 & |x| \le 1, \end{cases}$$

   さらに $-2 < x < 1$ のとき $h'(x) > 0$, $1 < x < 2$ のとき $h'(x) < 0$ をみたすことを示せ．

   (4) M, N を C^∞ 級多様体とし，$\epsilon > 0$ とする．C^∞ 級写像

$$F\colon (-\epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon) \times M \to N,$$
$$G\colon (\frac{1}{2} - \epsilon, 1 + \epsilon) \times M \to N$$

   が与えられ，任意の $p \in M$ に対し $F(1/2, p) = G(1/2, p)$ をみたすとき，$\Phi\colon (-\epsilon, 1+\epsilon) \times M \to N$ を

$$\Phi(t, p) := \begin{cases} F(g(4t)/2, p) & x \le 1/2, \\ G(g(4t-2)/2, p) & x \ge 1/2 \end{cases}$$

   で定めることができ，Φ は C^∞ 級になることを示せ．

   (5) M を C^∞ 級多様体，$p \in M$ とし，p のまわりの局所座標 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を，$\varphi(p) = \mathbf{0}$, $V := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1\} \subset \varphi(U)$ をみたすように取る．任意の $f \in C^\infty(U)$ に対し，$\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ を

$$\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(q) := \begin{cases} h(2\,|\varphi(q)|)f(q) & \varphi(q) \in V, \\ 0 & q \in U,\ \varphi(q) \notin V \text{ または } q \notin U \end{cases}$$

   で定めることができ，$\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ であることを示せ．また $q \in U, |\varphi(q)| \le \dfrac{1}{2}$ のとき $\widetilde{f}(q) = f(q)$ であることを示せ．

（提出の必要はありません）

補足．$f \in C^\infty(M)$ が $M_{[a,b]} := f^{-1}([a,b])$ に臨界点を持たないとき，$M_a := f^{-1}((-\infty, a])$ とおくとき $M_a \cong M_b$ であることを講義で示しました．まだ証明は終わっていませんが，概要をまとめておきます．
証明の第 1 段階は $M_{[a,b]} \cong [a,b] \times f^{-1}(a)$ を示すことでしたが，この微分同相は，$q \in f^{-1}(a)$ を f の勾配上ベクトル場 X の積分曲線に乗せて「流す」ことにより得られます．具体的には，$Y := \dfrac{1}{Xf}X$ が生成する 1 変数変換群 ϕ を考え，

$$\Phi\colon f^{-1}(a) \times [0, b-a] \to M_b, \quad \Phi(p,t) := \phi(t,p)$$

が定義され，微分同相になります．X を Y に取り換えるのは，f の値を「高さ」とみなしたとき，時間 t だけ「流した」後に「高さ」が t だけ増えるように調節するためです．f が $M_{[a,b]}$ に臨界点を持たないという仮定から関数 Xf は $M_{[a,b]}$ 上 0 にならず，Y が定義されます．以上のことと同じ議論により $M_{[a-\epsilon,a]} \cong M_{[a-\epsilon,b]}$ もわかります．なお，勾配上ベクトル場は局所座標上で f の（本当の）勾配ベクトル場を考え，それを 1 の分割で貼り合わせることで構成しました．1 の分割の構成には多様体が第 2 可算公理をみたすこと（あるいは，多様体が **paracompact** であること）を必要とします．
証明の第 2 段階では，$M_a \to M_b$ を，$M_{a-\epsilon}$ 上では恒等写像で，$M_{[a-\epsilon,a]}$ 上では上の微分同相 $M_{[a-\epsilon,a]} \cong M_{[a-\epsilon,b]}$ で定義しました．これがおおむね求める微分同相ですが，これだけだと「つなぎめ」の $f^{-1}(a-\epsilon)$ のところでの微分可能性が保証されません．滑らかに「つなげる」ためには，今回の問題 2 (4) のような類の工夫が必要です．問題 2 (4) で，素朴に

$$\Phi(t,p) = \begin{cases} F(2t,p) & t \le 1/2 \\ G(2t-1,p) & t \ge 1/2 \end{cases}$$

とすると，Φ は連続ではありますが C^∞ 級かどうかはわかりません．問題文のようにするとなぜ C^∞ 級になるのか考えてみてください．
問題 2 (3) の h のような関数を**台形関数**と呼んだりもします．グラフを描けば，そう呼ぶ理由がわかると思います．台形関数を使うと，問題 2 (5) のように，多様体上のある開集合上でのみ定義される C^∞ 級関数（例えば局所座標関数 x_i など）を，考えている点の近くでは値を変えないまま，多様体全体で定義されるよう拡張することができます．
こういった関数は，こうやって作れとレシピを与えられれば作れるかもしれませんが，最初に作った人はどのようにしてレシピに到達できたのかと感心します．