多様体論 演習問題 12（2020 年 1 月 21 日）

担当：境 圭一

1. $D^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$, $\mathbb{H}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \ge 0\}$ とおく．
   (1) $U_k := \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D^2 \mid 0 < r \le 1,\ \dfrac{k\pi}{2} < \theta < \dfrac{(k+2)\pi}{2}\right\}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ と $V := \left\{\boldsymbol{x} \in D^2 \mid |\boldsymbol{x}| < \dfrac{1}{2}\right\}$ は D^2 の開被覆をなすことを示せ．
   (2) 写像 $\varphi_k\colon U_k \to \mathbb{H}^2$, $\psi\colon V \to \mathbb{H}^2$ を
   $$\varphi_k(r\cos\theta, r\sin\theta) := (\theta, 1-r) \quad (k = 0, 1, 2, 3,\ \frac{k\pi}{2} < \theta < \frac{(k+2)\pi}{2}), \quad \psi(x, y) := (x, y+1)$$
   で定義する．これらは D^2 の局所座標系を定め，従って D^2 は境界つき 2 次元多様体であることを示せ．また $\partial D^2 = S^1$ でああることを示せ．
2. $D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$ とおく．前問を参考にして，D^n は境界つき n 次元多様体であること，ならびに $\partial D^n = S^{n-1}$ であることを示せ．
3. M を境界つき n 次元多様体とし，局所座標系として $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を取る．$B := \{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap \partial M \ne \emptyset\}$ とおくと，∂M は $\{U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M}\}_{\alpha \in B}$ を局所座標系として $(n-1)$ 次元多様体の構造を持つことを示せ．
4. M を 2 次元 C^∞ 級多様体とし，$f \in C^\infty(M)$, $p \in \mathrm{cr}(f)$ とする．p のまわりの局所座標を 1 つ固定し，それについて Hesse 行列 $H_f(p)$ を考える．
   (1) $\det H_f(p) < 0$ とするとき，p の指数を求めよ．
   (2) $\det H_f(p) > 0$, $\mathrm{tr}\, H_f(p) > 0$ とするとき（ただし tr は行列の跡 (trace) を表す），p の指数を求めよ．$\det H_f(p) > 0$, $\mathrm{tr}\, H_f(p) < 0$ のときはどうか？
5. M, N を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon N \to \mathbb{R}$ は Morse 関数であるとする．
   (1) $h\colon M \times N \to \mathbb{R}$ を $h(x, y) := f(x) + g(y)$ で定義するとき，h は Morse 関数であることを示せ．
   (2) $\mathrm{cr}(f) = \{p_1, \dots, p_k\}$, $\mathrm{cr}(g) = \{q_1, \dots, q_l\}$ であるとき，$\mathrm{cr}(h) = \{(p_i, q_j) \mid 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le l\}$ であることを示せ．
   (3) $S^m \times S^n$ の handle 分解を与えよ．
6. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の同値関係 $\simeq$ を
   $$\boldsymbol{z} \simeq \boldsymbol{w} \overset{\text{def}}{\iff} \text{ある } \lambda \in \mathbb{C} \text{ が存在して } \boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{w}$$
   で定め，$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\})/\simeq$ とみなす（演習問題 2-3 参照）．$(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が属する同値類を $[z_1 : \cdots : z_{n+1}]$ と表す．$U_i \subset \mathbb{C}P^n$ と $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n$ $(i = 1, \dots, n+1)$ を
   $$U_i := \{[z_1 : \cdots : z_{10}] \mid z_i \ne 0\}, \quad \varphi_i([z_1 : \cdots : x_{n+1}]) := \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$
   で定めると，$\{U_i, \varphi_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ は $\mathbb{C}P^9$ の局所座標系を定める（講義でやったことと本質的に同一）．
   (1) $\varphi_i^{-1}(w_1, \dots, w_n) = [w_1 : \cdots : w_{i-1} : 1 : w_i : \cdots : w_n]$ と書けることを示せ．
   (2) $f\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ を
   $$f([z_1 : \cdots : z_n]) := \frac{\sum_{k=1}^n k\,|z_k|^2}{\sum_{k=1}^n |z_k|}$$
   で定義する．$f \circ \varphi_i^{-1}$ を求め，f は C^∞ 級写像であることを示せ．
   注意：$w_j = x_j + \sqrt{-1}\, y_j$ $(j = 1, \dots, n)$ とおくと，U_i 上の局所座標は $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ である．「C^∞ 級」の意味は，$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ に関し C^∞ 級ということである．
   (3) U_i 上の f の臨界点は $\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{0}) = [0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$（第 i 座標のみ 1）で，これは非退化で指数は $2(i-1)$ であることを示せ．
   ヒント：例えば $i \ge 2$ のとき $\dfrac{\partial(f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial(f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial y_1}$ を計算するためには，分子に w_1 が現れないように式変形（割り算）をするとよい．指数を求めるには，$\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ を $(w_1, \dots, w_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ で与え，この座標の順序で Hesse 行列を計算するとよい．

7. 境界を持たない n 次元 C^∞ 級 compact 多様体 M 上に，臨界点を丁度 2 個持つ Morse 関数 $f \in C^\infty(M)$ が存在すると仮定する．

(1) 2 つの非退化臨界点の指数は，それぞれ 0 と n であることを示せ．

ヒント：M は compact なので，f は最大値と最小値を持つ．最大値と最小値を取る点は臨界点である．その点のまわりで Morse の補題の局所座標を取る．

(2) (1) より，M のハンドル分解は $M = h_0^n \cup h_n^n = D^n \cup D^n$ である．h_n^n の h_0^n への接着写像 $\psi\colon \partial h_n^n \hookrightarrow \partial D^n$ は $\partial D^n = S^{n-1}$ の微分同相であることを示せ．

ヒント：$\psi(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ は compact 空間の連続写像による像だから閉集合．$\psi(S^{n-1})$ は S^{n-1} の $n-1$ 次元部分多様体であることから開集合であることも示せる．

(3) $S^n_\pm := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_{n+1} \geq 0\}$ とおくと，$\varphi_\pm\colon S^n_\pm \to D^n, \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) := (x_1, \ldots, x_n)$ は微分同相であることを示せ．

(4) $\Phi_+\colon h_n^n = D^n \to S^n_+$ と $\Phi_-\colon h_0^n = D^n \to S^n_-$ を

$$\Phi_-^{-1}(\boldsymbol{x}) := \varphi_+^{-1}(\boldsymbol{x}), \quad \Phi_+(\boldsymbol{x}) := \varphi_-^{-1}(|\boldsymbol{x}|\,\psi(\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|)) \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}), \quad \Phi_+(\boldsymbol{0}) = (0, \ldots, 0, -1)$$

で定義する．$\Phi\colon M \to S^n$ を $\Phi|_{h_0^n} := \Phi_-, \Phi|_{h_n^n} := \Phi_+$ で定義すると，Φ は well-defined な同相写像であることを示せ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 問題 6 と Morse 理論から，$\mathbb{C}P^n \cong h_0^{2n} \cup h_2^{2n} \cup \cdots \cup h_{2n}^{2n}$ という handle 分解を得ます．ただし h_i^m は m 次元 i-handle です．特に $\mathbb{C}P^1 \cong h_0^2 \cup h_2^2$ であり，問題 7 から $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ がわかります．ただし後述のように，ここでわかるのは位相空間としての同相のみで，微分同相であることは別の議論を要します．

このように，Morse 関数による handle 分解は，多様体の形をある程度教えてくれますが，これで完全にわかるわけでもありません．問題は各 i-handle の接着に使われる埋め込み $\partial D^i \times D^{n-i} \hookrightarrow \partial\mathcal{H}$ が多岐に渡ることで，このことから多様体の埋め込みの分類が重要な問題であることがわかります．i-handle の接着写像は本質的には $\partial D^i = S^{i-1}$ の埋め込みに帰着されます（残りの D^{n-i} の部分は，埋め込みを「太らせる」ことで概ね得られます）．例えば単連結な 4 次元多様体の場合，重要なのは 0-handle への 2-handle の接着ですが，そのときに使われる埋め込みは $S^1 \times D^2 \hookrightarrow S^3$ という形のものです．その分類は**結び目理論** (knot theory) と呼ばれ，トポロジーにおいて最も研究が盛んな分野の 1 つだと思います．

(ii) 問題 7 は Reeb の定理と呼ばれます．境界のない compact な多様体を**閉多様体** (closed manifold) と呼びますが，compact 性から，閉多様体 M 上の連続関数は最大値と最小値を持ち，従って M 上の Morse 関数は少なくとも 2 個の非退化臨界点を持ちます．臨界点の個数が最小であるような Morse 関数を許容する閉多様体は，位相空間としては球面しかない，ということを主張する定理で，Morse 理論の有用性を端的に表すものだと思います．注意すべきなのは，M は球面と <u>微分同相</u> であることまでは主張していない，ということです．問題 7 で構成した写像 Φ は，$\boldsymbol{0} \in D^n = h_n^n$ において一般には微分可能ではありません．実際，S^n と位相空間としては同相だが多様体としては微分同相ではない n 次元閉多様体 M の例（異種球面）は，特に $n \geq 7$ において，たくさん知られています．$n = 4$ の場合が長らく未解決ですが，ごく最近「異種 S^4 は存在しない」と主張する論文が公開されました．ただし 2020 年 1 月現在，その論文の正確さは確認されていない，と思います．

異種球面が存在する場合，その原因は 0-handle と n-handle の接着に使われる微分同相 $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$ にあります．多様体 M の微分同相全体の集合は写像の合成を積として群をなします．この群は M の**微分同相群**と呼ばれ，しばしば $\mathrm{Diff}(M)$ などと書かれます．微分同相群の研究も，埋め込みの研究と並んで重要な問題であることがわかります．

また問題 7 で構成した Φ が微分同相でない場合でも，$\Phi|_{M \setminus \boldsymbol{0}}$ は $S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}$ への微分同相であることがわ

かります．つまり M は S^n と同相で，微分同相ではないが，1 点を除けば $S^n \setminus \{1 \text{点}\} \cong \mathbb{R}^n$ （この微分同相は立体射影によります）と微分同相である，ということが言えます．通常の球面と異種球面の差はかなり微妙なものであることがうかがえます．