

2019 年度 多様体論 レポート問題 1

担当：境 圭一

実数を成分とする 3 次正方行列全体の集合を $M_3(\mathbb{R})$ と書き,

$$M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \mapsto (x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{13}, x_{23}, x_{33})$$

により $M_3(\mathbb{R})$ を \mathbb{R}^9 と同一視する.

$f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$ を以下のように定義する: $X \in M_3(\mathbb{R})$ を $X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}$ (各 $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3$ は縦ベクトル) と表したとき

$$f(X) := (|\mathbf{x}_1|^2 - 1, |\mathbf{x}_2|^2 - 1, |\mathbf{x}_3|^2 - 1, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1),$$

ただし $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}$ などは Euclid 内積を表し, $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ である. このとき $O(3) = f^{-1}(\mathbf{0})$ である.

(1) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \in O(3)$, $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2, 3$) のとき, A における f の Jacobi 行列 $Df(A)$ を求めよ.

(2) $O(3)$ は C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ. $\dim O(3)$ を求めよ.

(11/5 出題)

締切：11/19 (火) の講義開始時. 教卓の上に置いてください.

※氏名と学籍番号を忘れないこと.

※代理提出可です.

※締切以前の提出も受け付けます. 研究室 (A403) にお越しください.