2019 年度 多様体論 レポート問題 1（11/5 出題）略解・コメント

担当：境 圭一

直前まで $B \in \mathrm{O}(3)$ と書いていた行列が $\operatorname{rank} Df$ の計算のとき急に A になる，という書き間違いは時にはあり得ることと思いますが，同じタイミングで描き間違えている答案が複数あるのは，明らかに他人のレポートの丸写しが行われているということです．**丸写し自体が恥ずかしいことですが，中身がまったく吟味されていないことが事態を深刻にしていると思います．**みんなで議論して考えるのは大切なことですが，**他人のレポートを何も考えずに丸写ししていても得るものはなく，ただの時間の浪費です．**目先の得点などというつまらないものにとらわれて頭を使うことを放棄していると，社会で必要な素養が身についていないことに卒業したあとから気づくことになって，最終的には自分の首を絞めることになります．

答案が似通うのは仕方ない側面もあり，線引きは難しいのですが，上のような理由で丸写しと思われた答案は，大きく減点してあります．コピー元がどの答案かは判定できないので（できる場合もあるが），コピー元であっても減点されているかもしれません．

$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,3} \in \mathrm{O}(3)$ における f の Jacobi 行列 $Df(A)$ は

$$Df(A) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{pmatrix}$$

です．

$\mathrm{O}(3)$ が多様体の構造を持つことを示すには，**任意の** $A \in \mathrm{O}(3)$ に対し $\operatorname{rank} Df(A) = 6$ であることを示せば十分です．そのために $Df(A)$ の行ベクトルを ${}^t\boldsymbol{u}_1, \dots, {}^t\boldsymbol{u}_6$ とおき，

$$\sum_{k=1}^{6} \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_6 = 0$$

を示しましょう．A の行ベクトルを ${}^t\boldsymbol{b}_1, {}^t\boldsymbol{b}_2, {}^t\boldsymbol{b}_3$ とし，${}^t(2\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6) = \boldsymbol{v}_1$, ${}^t(2\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = \boldsymbol{v}_2$, ${}^t(2\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6) = \boldsymbol{v}_3$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}$（9 本の連立 1 次方程式になる）は次のように書き換えられます：

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0 \quad \cdots \text{(i)}, \quad \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0 \quad \cdots \text{(ii)}, \quad \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0 \quad \cdots \text{(iii)}$$

(i) より $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ ですが，$A \in \mathrm{O}(3)$ より $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の（正規直交）基底ですから，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ となります．実際，$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の 1 次結合の形に書けますが，そのとき (i) より $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$, つまり $|\boldsymbol{v}_1| = 0$ がわかります．これは $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ を意味します．(ii), (iii) からも同様に $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が言えて，結局 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_6 = 0$ となりました．

$\dim \mathrm{O}(3) = 9 - 6 = 3$ ですが，これは上のような多様体構造を入れたからです．例えば $\mathrm{O}(3)$ に離散位相を入れれば，各点 $A \in \mathrm{O}(3)$ は 0 次元多様体で，$\mathrm{O}(3)$ は 0 次元多様体の（非可算無限個の）非交和と見ることもできます（この講義では多様体に第 2 可算公理をみたすことを要請しているので，これは多様体とはみなせませんが）．もっとも，このような見方をするのであれば，集合として $\mathrm{O}(3)$ を考えていることに意味はなくなります．

この証明を真似すれば，任意の自然数 n に対し，$\mathrm{O}(n)$ が多様体の構造を持つことの証明も難しくはないはずです．

多様体とは，**すべての**点の近傍が Eulid 空間に見えるような位相空間ですから，**任意の** $A \in \mathrm{O}(3)$ について $\operatorname{rank}(A) = 6$ である，ということが大切です．単に「$\operatorname{rank} A = 6$ だから」では説明不足です．

この問題の場合，$\operatorname{rank} A$ の計算には **Gram 行列** ${}^tAA$ を使うとよいようで，そのようにした答案がたくさんありました．一般に $m \times n$ 行列 A に対し $\operatorname{rank} {}^tAA = \operatorname{rank} A$ が成立します．これは Gram 行列の特殊性で，一般には B を $l \times m$

行列とするとき $\operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$ です．Gram 行列の場合になぜ等号が成り立つか，正しいことを確認した上で使うことが大切です．

補足．

(i) $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ですが，実は包含写像はホモトピー同値写像です．ホモトピー逆写像は，Gram-Schmidt の直交化法 $GS\colon GL_n(\mathbb{R}) \to O(n)$ で与えられます．

(ii) 任意の $A \in O(n)$ は $\det A = \pm 1$ をみたします．実は $O(n)$ は 2 つの弧状連結成分に分かれ，一方は $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$, もう一方は $\det A = -1$ であるような $A \in O(n)$ 全体です．