2019 年度 多様体論 レポート問題 2

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を $10a+b$（ただし a,b は $0 \leq a,b \leq 9$ をみたす整数）と表す．例えば 17S1067X なら $(a,b)=(6,7)$, 17S1089Y なら $(a,b)=(8,9)$.

$n := a+b$ とおき

$$M := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + \frac{x_2^2}{(n+1)^2} + \frac{x_3^2}{(20-n)^2} = 1\right\}$$

とおく．$p_\pm := (\pm 1, 0, 0) \in M$（複合同順，以下同様），$V_\pm := M \setminus \{\mp p\}$ とする．$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) \in V_\pm$ に対し，$p_\mp$ と $\boldsymbol{x}$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線上で第 1 座標が 0 の点を $(0,\varphi_\pm(\boldsymbol{x})) \in \{0\}\times\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ と書くと，$\varphi_\pm \colon V_\pm \to \mathbb{R}^2$ が定まる．この $\varphi_\pm$ は M の局所座標系を定める（証明不要）.

(1) $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3) \in M$ と $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ と $\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) \in M$ を求めよ．ただし

- a が偶数の場合，φ_+ と φ_+^{-1} については計算過程を示し，φ_- と φ_-^{-1} については答のみ記せ.
- a が奇数の場合，φ_- と φ_-^{-1} については計算過程を示し，φ_+ と φ_+^{-1} については答のみ記せ.

(2) $f \colon M \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) := x_1$ で定義する．f は C^∞ 級関数であることを示せ.

(3) f の臨界点をすべて求めよ.

(4) (3) の臨界点が非退化であるかどうか調べよ．非退化である場合は，その指数を求めよ.

(12/24 出題)

締切：1/7（火）の講義開始時．教卓の上に置いてください.

※氏名と学籍番号を忘れないこと.

※代理提出可です.

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください.