2019 年度 多様体論 レポート問題 2（12/24 出題）略解・コメント

担当：境 圭一

一般に，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し

$$M := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + \frac{x_2^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_2^2} = 1\right\}$$

について考えます．レポート問題は $\alpha_1 = n+1, \alpha_2 = 20-n$ の場合です．
$\boldsymbol{x} \in V_\pm$ とします．このとき $x_1 \neq \mp 1$ です．$p_\mp, \boldsymbol{x}, (0, \varphi_\pm(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^3$ が（この順に）一直線上にあるので

$$\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) - p_\mp = k(\boldsymbol{x} - p_\mp)$$

をみたす $k \in \mathbb{R}$（実際には $0 < k < 1$）が存在します．成分表示すれば

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \varphi_\pm(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 \pm 1 \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

です．第 1 成分を比べて $k = \dfrac{1}{1 \pm x_1}$ がわかるので（ここで $x_1 \neq \mp 1$ を使う），第 2, 3 成分を比べて $\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{1 \pm x_1}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を得ます．
次に $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y})$ を計算します．逆写像の意味を考えれば，$p_\mp, \varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}), (0, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^3$ が（この順に）一直線上にあるので

$$\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) - p_\mp = l\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - p_\mp\right)$$

をみたす $l \in \mathbb{R}$（実際には $0 < l < 1$）が存在します．成分表示すれば

$$\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \mp 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \pm 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

です．$\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) \in M$ なので

$$(\pm l \mp 1)^2 + \frac{l^2 y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{l^2 y_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \quad \text{つまり} \quad \left(1 + \frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{y_2^2}{\alpha_2^2}\right) l^2 - 2l = 0$$

を得ます．ここから $l = 0$ または $2 \cdot \left(1 + \dfrac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{y_2^2}{\alpha_2^2}\right)^{-1}$ ですが，$(*)$ より $l = 0$ は $\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) = p_\mp$ を意味し目的のものではありません．もう 1 つの解が求めるもので，これを $(*)$ に代入すれば

$$\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{1 + (y_1/\alpha_1)^2 + (y_2/\alpha_2)^2} \begin{pmatrix} \pm(1 - (y_1/\alpha_1)^2 - (y_2/\alpha_2)^2) \\ 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$$

です．

$\varphi_\pm \colon V_\pm \to \mathbb{R}^2$ が M の局所座標系を定めることは，ぜひ確認しておいてください．ここではこれを認めます．
$f \colon M \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であるか否かは，各 $p \in M$ のまわりの局所座標を使って f を表示したとき，それが C^∞ 級であるか否か，ということです．どの点も $V_\pm$ のどちらかには入りますから，

$$(f \circ \varphi_\pm^{-1})(\boldsymbol{y}) = \pm \frac{1 - (y_1/\alpha_1)^2 - (y_2/\alpha_2)^2}{1 + (y_1/\alpha_1)^2 + (y_2/\alpha_2)^2} \tag{$**$}$$

が C^∞ 級か否か，ということですが，$(**)$ が C^∞ 級であることは自明でしょう．

$V_\pm$ 上の f の臨界点とは，$(**)$ の偏微分がすべて 0 になるような点 $\boldsymbol{y}$ に対応する M 上の点 $\boldsymbol{x} = \varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y})$ です．$(**)$ より

$$(f \circ \varphi_\pm^{-1})(\boldsymbol{y}) = \mp 1 \pm \frac{1}{1 + (y_1/\alpha_1)^2 + (y_2/\alpha_2)^2} \quad \text{なので} \quad \frac{\partial (f \circ \varphi_\pm^{-1})}{\partial y_i}(\boldsymbol{y}) = \mp \frac{2(y_i/\alpha_i^2)}{(1 + (y_1/\alpha_1)^2 + (y_2/\alpha_2)^2)^2}$$

です．よって $V_\pm$ 上の f の臨界点は，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ に対応する $\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{0})=(\pm1,0,0)=p_\pm$ です．

臨界点 $p_\pm$ が非退化か否かとは，これらの点における $f\circ\varphi_\pm^{-1}$ の Hesse 行列

$$H_f(p_\pm)=\Big(\frac{\partial^2(f\circ\varphi_\pm^{-1})}{\partial y_i\partial y_j}(\boldsymbol{0})\Big)_{i,j=1,2}$$

が正則か否か，ということです．具体的に計算すれば $H_f(p_\pm)=\begin{pmatrix}\mp4/\alpha_1^2 & \\ & \mp4/\alpha_2^2\end{pmatrix}$ がわかりますから，$p_\pm$ はともに非退化な臨界点です．指数は $H_f(p_\pm)$ の負の固有値の数なので，$\mathrm{ind}_f(p_+)=2, \mathrm{ind}_f(p_-)=0$ です．

(1) で $\varphi_\pm$ を求めるところでは，$\boldsymbol{x}\in V_\pm$ だから $x_1\neq\mp1$ である，というところがポイントになるはずです．このことがはっきりしていない答案が目立ちます．文字を含む式で割る，文字を含む式の平方根を取る，といった操作には細心の注意を払わなければなりません．

(2) は f を局所座標表示した関数の微分可能性を問題にする，ということはある程度理解されてきたように思えますが，なぜか「$f\circ\varphi_\pm^{-1}$ は $\underline{\mathbb{R}^3}$ 上の C^∞ 級関数である」という記述が目立ちました．写像の定義域がどこであるか，はいつも気にかけていないといけないところです．

(3), (4) は注意深く計算すれば問題ないはずです．上の解答例でいうところの $l=2\cdot\Big(1+\dfrac{y_1^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{y_2^2}{\alpha_2^2}\Big)^{-1}$ を

$$l=\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2y_1^2+\alpha_1^2y_2^2}$$

に書き換えるのは，計算を煩雑にするという意味で，よくないように思えます．