

2019 年度 多様体論 レポート問題 3

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 1 桁に 1 を加えた値を  $m$  とおく．例えば 17S1123X なら  $m = 4$ ，また 17S1789Y なら  $m = 10$ ．

$\mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\}$  上の同値関係  $\simeq$  を

$$x \simeq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = kx \text{ となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

で定め、 $\mathbb{R}P^9 = (\mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\})/\simeq$  とみなす (演習問題 2-3 参照)． $(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\}$  が属する同値類を  $[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9$  と表す． $U_i \subset \mathbb{R}P^9$  と  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^9$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) を

$$U_i := \{[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9 \mid x_i \neq 0\}, \quad \varphi_i([x_1 : \dots : x_{10}]) := \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{10}}{x_i} \right)$$

で定めると、 $\{U_i, \varphi_i\}_{i=1, \dots, 10}$  は  $\mathbb{R}P^9$  の局所座標系を定める (講義でやったことと本質的に同一なので証明不要)．

(1)  $\varphi_m^{-1}: \mathbb{R}^9 \rightarrow U_m$  を求めよ．

ヒント：ここでの  $\mathbb{R}P^9$  の定義は講義でのものとは異なる (結果的には同じ多様体になるが)．ここでの定義では  $\varphi_i^{-1}$  を講義のものより簡潔に表示することができる．

(2)  $[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9$  に対し

$$f([x_1 : \dots : x_{10}]) := \frac{\sum_{k=1}^{10} kx_k^2}{\sum_{k=1}^{10} x_k^2} = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 10x_{10}^2}{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}$$

とおく． $f: \mathbb{R}P^9 \rightarrow \mathbb{R}$  は well-defined であり、 $f \circ \varphi_m^{-1}: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^\infty$  級であることを示せ．

(3)  $U_m$  上の  $f$  の臨界点をすべて求めよ．それが非退化かどうか調べ、非退化な場合は指数を求めよ．

ヒント： $\frac{\partial(f \circ \varphi_m^{-1})}{\partial x_j}$  を計算するときは、あらかじめ  $x_j$  が分子に現れないよう変形しておくとう簡単．

(1/21 出題)

締切：1/27 (月) 16:30. 研究室 (A403) までお持ちください．

※氏名と学籍番号を忘れないこと．

※代理提出可です．

※締切以前の提出も受け付けます．