

2019 年度 多様体論 レポート問題 3

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 1 桁に 1 を加えた値を m とおく。例えば 17S1123X なら $m = 4$, また 17S1789Y なら $m = 10$.

$\mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係 \simeq を

$$x \simeq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = kx \text{ となる } k \in \mathbb{R} \text{ が存在する}$$

で定め, $\mathbb{R}P^9 = (\mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\})/\simeq$ とみなす (演習問題 2-3 参照). $(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が属する同値類を $[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9$ と表す. $U_i \subset \mathbb{R}P^9$ と $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^9$ ($i = 1, \dots, 10$) を

$$U_i := \{[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9 \mid x_i \neq 0\}, \quad \varphi_i([x_1 : \dots : x_{10}]) := \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{10}}{x_i} \right)$$

で定めると, $\{U_i, \varphi_i\}_{i=1, \dots, 10}$ は $\mathbb{R}P^9$ の局所座標系を定める (講義でやったことと本質的に同一なので証明不要).

(1) $\varphi_m^{-1}: \mathbb{R}^9 \rightarrow U_m$ を求めよ.

ヒント: ここでの $\mathbb{R}P^9$ の定義は講義でのものとは異なる (結果的には同じ多様体になるが). ここでの定義では φ_i^{-1} を講義のものより簡潔に表示することができる.

(2) $[x_1 : \dots : x_{10}] \in \mathbb{R}P^9$ に対し

$$f([x_1 : \dots : x_{10}]) := \frac{\sum_{k=1}^{10} kx_k^2}{\sum_{k=1}^{10} x_k^2} = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 10x_{10}^2}{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}$$

とおく. $f: \mathbb{R}P^9 \rightarrow \mathbb{R}$ は well-defined であり, $f \circ \varphi_m^{-1}: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級であることを示せ.

(3) U_m 上の f の臨界点をすべて求めよ. それが非退化かどうか調べ, 非退化な場合は指数を求めよ.

ヒント: $\frac{\partial(f \circ \varphi_m^{-1})}{\partial x_j}$ を計算するときは, あらかじめ x_j が分子に現れないよう変形しておくが簡単.

(1/21 出題)

締切: 1/27 (月) 16:30. 研究室 (A403) までお持ちください.

※氏名と学籍番号を忘れないこと.

※代理提出可です.

※締切以前の提出も受け付けます.