以下，$\mathbb{R}^N$ は $N$ 次元 Euclid 空間を表し，その部分集合には相対位相を入れる．また実数を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書き，自然に $\mathbb{R}^{mn}$ と同一視して位相を入れる．特に $M_n(\mathbb{R}) := M_{n,n}(\mathbb{R})$ とおく．

1. $S^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$ とし，$p_\pm := (0, \ldots, 0, \pm 1)$（複合同順，以下同様），$V_\pm := S^n \setminus \{\mp p\}$ とする．$\boldsymbol{x} \in V_\pm$ に対し，$p_\mp$ と $\boldsymbol{x}$ を通る $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の直線上で第 $n+1$ 座標が 0 の点を $(\varphi_\pm(\boldsymbol{x}), 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ と書くと，$\varphi_\pm \colon V_\pm \to \mathbb{R}^n$ が定まる．これらは $S^n$ の局所座標系を定める（証明不要）．
   (1) $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ と $\varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) \in S^n$ をそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って表せ．（答のみでよい）
   (2) $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{x}) := x_{n+1}$ で定義する．$f$ は $C^\infty$ 級関数であることを示せ．

2. 特殊線形群
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}$$
   は $C^\infty$ 級多様体の構造を持つことを示せ．

3. $f \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) := \dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t^3 - t \\ 1 \end{pmatrix}$ で定義する．$f$ ははめ込みであるが，埋め込みではないことを示せ．

4. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し，$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f_A(\boldsymbol{x}) := A\boldsymbol{x}$ で定義する．
   (1) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し，$\ker f_A = \ker f_{{}^t\!AA}$ を示せ．ただし ${}^t\!A$ は $A$ の転置行列である．
   (2) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^t\!AA$ を示せ．

配点：10 = 5 + 5, 15, 10, 5 = 3 + 2