2019 年度 多様体論 中間試験（2019 年 12 月 10 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{1 \pm x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n), \quad \varphi_\pm^{-1}(\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{1+|\boldsymbol{y}|^2}(2y_1, \dots, 2y_n, \pm(1-|\boldsymbol{y}|^2))$

   (2) $(f \circ \varphi_\pm^{-1})(\boldsymbol{y}) = \pm\dfrac{1-|\boldsymbol{y}|^2}{1+|\boldsymbol{y}|^2}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数であるから，f は S^n 上の C^∞ 級関数である．

2. $f\colon M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ を

$$f(X) := \det X - 1$$

で定義すると f は C^∞ 級で $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ である．$X = \left(x_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{R})$ の (i,j) 余因子を Δ_{kj} とおくと，$j = 1, \dots, n$ に対し次が成り立つ：

$$\det X = \sum_{k=1}^{n} x_{kj}\Delta_{kj} \tag{$*$}$$

Δ_{kj} は X の第 k 行と第 j 列を取り除いて得られる行列の行列式だから x_{ij} $(i = 1, \dots, n)$ を含まない．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(X) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}\frac{\partial x_{kj}}{\partial x_{ij}} = \Delta_{ij}$$

である．従って X における f の Jacobi 行列 $Df(X) \in M_{1,n^2}(\mathbb{R})$ は，Δ_{ij} $(i,j = 1, \dots, n)$ を並べたものになる．特に $X \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ とすると $\det X \neq 0$ だから，$(*)$ より，少なくとも 1 つの $\Delta_{ij} \neq 0$ である．従って，$X \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ のとき $\operatorname{rank} Df(X) = 1$ である．

以上のことから $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は C^∞ 級多様体の構造を持つ．

3. $\dfrac{df}{dt}(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} t^4 + 4t^2 - 1 \\ -2t \end{pmatrix}$ である．第 2 成分が 0 になるのは $t = 0$ のときのみであるが，そのとき第 1 成分は -1 だから，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\dfrac{df}{dt}(t) \neq \boldsymbol{0}$ である．従って f ははめ込みである．

一方，$f(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = f(1)$ であるから f は単射でなく，従って埋め込みではない．

4. (1) $\boldsymbol{x} \in \ker f_A$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だから，$f_{{}^tAA}(\boldsymbol{x}) = {}^tA(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 従って $\boldsymbol{x} \in \ker f_{{}^tAA}$ である．

   $\boldsymbol{x} \in \ker f_{{}^tAA}$ とすると ${}^tAA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だから

$$\boldsymbol{x} \cdot {}^tAA\boldsymbol{x} = 0 \quad (\mathbb{R}^n \text{の Euclid 内積})$$

   である．一方

$$\boldsymbol{x} \cdot {}^tAA\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tAA\boldsymbol{x}) = {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x}) = |A\boldsymbol{x}|^2$$

   だから $|A\boldsymbol{x}|^2 = 0$ を得る．従って $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, つまり $\boldsymbol{x} \in \ker f_A$ である．

   (2) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ のとき，f_A と $f_{{}^tAA}$ の定義域はともに $\mathbb{R}^n$ である．よって次元定理より

$$n = \dim\ker f_A + \dim\operatorname{Im} f_A, \quad n = \dim\ker f_{{}^tAA} + \dim\operatorname{Im} f_{{}^tAA} \tag{$**$}$$

   である．$\dim\operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$, $\dim\operatorname{Im} f_{{}^tAA} = \operatorname{rank}{}^tAA$ であることと，(1) より $\ker f_A = \ker f_{{}^tAA}$ であることを $(**)$ に適用して $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}{}^tAA$ を得る．

配点：10 = 5 + 5, 15, 10, 5 = 3 + 2