2019 年度 多様体論 中間試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 9.9 点，最高点は 33 点でした．人数分布は以下の通りです：

点数	∼ 14	15 ∼ 19	20 ∼ 24	25 ∼ 30	33
17S	22	2	1	1	1
17S 以外	4	0	0	0	0

問題ごとの平均点は以下の通りです：

問題	1	2	3	4	合計
17S	1.6	1.7	5.4	1.2	9.9
17S 以外	0.3	0.5	5.0	0.5	6.3

想像以上によくありませんでした．
この講義に限らず，一般的な定義や例はしばしば意味をつかみづらく，それを補うために具体例が取り扱われます．一般論が具体例にどのように適用されているか，あるいは同じことですが，扱っている具体例が一般論ではどの部分に該当するのか，1 つ 1 つ吟味していって初めて意味を理解できます．そういった地道な作業が行われていない印象を受けます．そのようなことを実際に行うには，通常はかなりの時間を要するはずで，試験前に詰め込もうとしても不可能である[*1]ことが理解されたと思います．一方で，日頃からの積み重ねがあれば，さほど困難な試験ではなかったはずです．問題 1〜3 は講義で扱った，あるいは自分で確かめるべき演習問題として提示したような問題が中心でした．
なお問題 4 は，レポート 1 で多くの人が使っていた Gram 行列の階数に関する事実の確認でした．便利な事実だからと鵜呑みにしてはいけません[*2]．何事も自分で納得するようにする習慣がないと，仮に相手に悪意があって偽りを吹き込まれたときに被害を受けるのは自分です．悪意がないとしても，教科書に書いてある内容が誤っていることは珍しくありません．専門的な内容はそれだけ難しく，慎重に書いたつもりでも間違うことはあるのです．
以下，問題ごとのコメントです．

1. (1) は立体射影で，この講義でも扱いましたし，「幾何入門」でも $n = 2$ の場合をやってあるので，答を暗記していなくても求め方はわかるはずです．何かを暗記しようとしても労多くして得るものは少なく，何かしらの意味を理解しないと身につかないものだと思います．[*3]
   (2) では，予想されたことですが，「$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_{i,n+1}$」のような答案がたくさんありました．$x_1, \dots, x_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の座標であって S^n の座標ではありません．例えば (1) の立体射影のような局所座標によって，任意に与えられた $p \in S^n$ の S^n 内での近傍を Euclid 空間と同一視し，その座標に関して f を n 変数多項式とみなしたときの微分可能性が問題です．$f(x) = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}$ と書き直して $x_1, \dots, x_n$ に関する微分可能性を論じた人が何人かいて惜しかったのですが，$x_{n+1} = 0$ の集合上では $x_1, \dots, x_n$ は局所座標として働かないので，別の座標を取り直して考える必要が出てきます．
2. 講義で扱った内容そのままです．線形代数で学んだ知識が多様体論にそのまま生かされるという意味で面白い例だと思いますので，ぜひ復習しておいてください．線形代数の内容でわからないことがあれば，この機会に復習するとよいでしょう．この先どんな数学を学ぶにしても，それらの多くは何らかの意味で線形代数または微分積分の延長上にあるはずで，線形代数と微分積分に習熟しておくことは進路の幅を広げてくれます．
3. 直近の講義で演習として残してあった問題で，比較的できていました．

[*1] 書いていて耳が痛い
[*2] 書いていて耳が痛い
[*3] 書いていて耳が痛い

はめ込みであることを示すのに必要なのは，各 $t \in \mathbb{R}$ における $df_t : T_t\mathbb{R}^1 \to T_{f(t)}\mathbb{R}^2$ の単射性で，これは適当な基底により $\dfrac{df}{dt}(t)$ で表現されるので，$\dfrac{df}{dt}(t) \neq \mathbf{0}$ を示すことと等価です．「$\dfrac{df}{dt}(t)$ の単射性を示す」という誤りが目立ちました．

埋め込みでないことを示すのに必要なのは，$f : \mathbb{R}^1 \to f(\mathbb{R}^1)$ とみたときに同相かどうかです．これも予想されたことですが「$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ が同相でないから」という誤りが目立ちました．どんな写像 $\phi : A \to B$ も，$\phi : A \to \phi(A)$ とみれば全射ですから，主に単射性が問題になります．

4. 「$\ker f_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = E_n\}$」という誤りが非常に多くみられました．そもそも $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ですから，それと m 次単位行列が等しい，というのは無意味です．またこれはベクトル空間の話ですから，ベクトルの和に関する単位元は $\mathbf{0}$ です．また，今の時点で「$\ker f_A = A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$」などと書いているようではいけません．異なる性質のものを等号で結んでしまう人が後を絶ちません．

   (1) で難しいのは $\ker f_{{}^tAA} \subset \ker f_A$ を示すほうだと思います．「${}^tAA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の両辺に ${}^tA^{-1}$ をかける」という誤りが目立ちました．そもそも A が正方行列でなければ A^{-1} はありませんし，正方行列であっても正則であるという仮定はありません．また「${}^tAA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ だから $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$」というのも誤りです．行列の積では $A, B \neq O$ であっても $AB = O$ ということはあり得ます．

●解答例は下記 URL に置いてあります．採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，早めに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

●レポートも含めた現在までの点数を見て，あとどれくらいの点数を取りたいか / 取らなければならないかを確認し，今後の学習のやり方を考えてください．追試などの救済措置は一切取らないことは明言しておきます（レポートで十分なはず）．

(12/17)