多元環の Hochschild 拡大環について

板垣　智洋　（高崎経済大学）

K を代数的閉体とし、K 上の多元環 A に対して、$DA = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ とする。

Hochschild 拡大環は 1945 年に Hochschild [3] によって導入された環拡大であり、自明拡大環の一般化である。多元環 A の DA による Hochschild 拡大環は 2-cocycle $\alpha : A \times A \to DA$ によって定まり、2 次のコホモロジー群 $H^2(A, DA)$ とホッホシルト拡大の同値類全体の間に一対一対応が存在する。また、DA による Hochschild 拡大環は自己入射的であり、Hochschild 拡大環は 2-cocycle によって豊富な自己入射的多元環を与える。特に、自明拡大環は対称多元環である。

本講演の前半では、自己入射的中山多元環についてホッホシルト拡大環の quiver について述べる [5]。自明拡大環の quiver については Fernández と Platzeck により決定されている [1]。Hochschild 拡大環に対しては 2-cocycle に依存するためほとんど決定されていない。ここでは自己入射的中山多元環について 2-cocycle を調べることで Hochschild 拡大環の quiver を決定する。

後半では、Hochschild 拡大環が対称多元環であるための必要十分条件について説明する。また、cycle をもたない bound quiver algebra に対して、その Hochschild 拡大環をある条件で分類する。1999 年、Hochschild 拡大環が対称多元環であるための十分条件が 2-cocycle を用いて与えられ [6]、講演者はこの十分条件を拡張したが必要十分条件ではなかった [4]。最近、Han によって Hochschild 拡大環が対称的であるための 2-cocycle に関する必要十分条件が発見され、Hochcshild 拡大環の対称性について明らかになった [2]。一方、一般に Hochschild 拡大環は（拡大の意味で）同値であるとき環同型であるが、逆は一般に成り立たない。ただし、多元環の 2 つの Hochschild 拡大環が同値でなくても同型となる場合がある。ここでは、多元環 A の同型な Hochschild 拡大環を定める 2-cocycle の関係について、A の自己同型に関する結果を述べ、A が cycle をもたない bound quiver algebra である場合の結果を述べる。

参考文献

[1] E. Fernández and M. Platzeck, Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner, *J. Algebra* 249 (2002), 326–344.

[2] Y. Han, Symmetry criteria for Hochschild extensions, arXiv:2012.15510v2 [math.RA]

[3] G. Hochschild, On the Cohomology Groups of an Associative Algebra, *Annals of Mathematics* (2) 46 (1945), 58–67.

[4] T. Itagaki, Symmetric Hochschild extension algebras and normalized 2-cocycles, *Arch. Math.* 112 (2019), no. 3, 249–259.

[5] H. Koie, T. Itagaki and K. Sanada, The ordinary quiver of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras, *Comm. in Algebra* 46 (9) (2018), 3950–3964.

[6] Y. Ohnuki, K. Takeda and K. Yamagata, Symmetric Hochschild extension algebras, *Collo. Math.* 80 (1999), 155–174.