結び目のなす空間に関するスペクトル系列について

森谷　駿二

$\mathrm{Emb}(N, M)$ を多様体 N から M への C^∞-埋め込みのなす空間とする．2007 年頃から，Goodwillie の埋め込み解析を介して，配置空間やオペラッドと (余次元が 3 以上の) 埋め込みのなす空間とのつながりが発見されてきた．この応用として，long knot に関するあるスペクトル系列が退化するだろうという Vassiliev の予想の有理係数，余次元 3 以上の場合の肯定的解決や，ある条件の下で $\mathrm{Emb}(N, \mathbb{R}^n)$ の有理ホモロジーが N の有理ホモトピー型のみに依存することの証明などがある．これらは値域が $\mathbb{R}^n$ の場合の研究だが，値域が一般の場合の研究として，$\mathrm{Emb}(S^1, M)$(M の中の結び目の空間) の研究が 2019 年ごろから何人かによって行われている．講演者は次元が 4 以上の単連結な閉多様体 M に対して，$\mathrm{Emb}(S^1, M)$ のコホモロジーに収束するようなスペクトル系列を構成した．$\mathrm{Emb}(S^1, M)$ については，Sinha によるスペクトル系列もあり，講演者のものは Sinha のものの変種だが，E_2 項が M のコホモロジー環で表せ，具体例を計算できる．

この講演では，まず，結び目の空間と配置空間を関連付ける Sinha の cosimplicial model を紹介する．このモデルは (long knot の場合には) 上記の Vassiliev の予想の証明でも使われたものである．その後，スペクトル系列の構成について述べる．ここでの主なアイデアは，Cohen による Poincaré 双対性の精密化を使って，配置空間上の構造を fat diagnal 上の構造に置き換えることである．また，時間が許せば，スペクトル系列と表示が似ている Idrissi による配置空間の可換 dg-代数モデルについても紹介する．

〜以下，講演ノート〜

講演の一部は以下を用いて行う予定です．講演内容は下記第 3 節を除き [4] に基づいています.

1　オペラッド，スペクトラム

$(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I})$：対称モノイダル圏とする．主に扱うのは以下の場合

$(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}) = (\mathcal{TOP}, \times, *)$ 位相空間の圏，　　$(\mathcal{CH}_{\boldsymbol{k}}, \otimes_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k})$ 環 $\boldsymbol{k}$ 上のチェイン複体の圏

定義 1. (非対称) オペラッド $\mathcal{O}$ とは,

1. $\mathcal{C}$ の対象の列 $\mathcal{O}(1),\ \mathcal{O}(2),\ \mathcal{O}(3),\ \ldots,\ \mathcal{O}(n),\ \ldots$
2. partial composition $(-\circ_i -) : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1) \qquad (1 \leq i \leq n)$

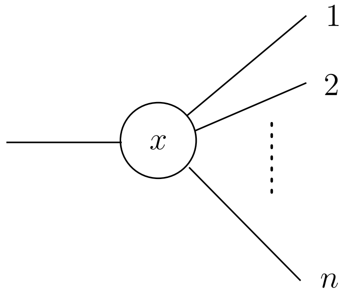
で次の条件を満たすもの.

1. (結合律) $x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m),\ z \in \mathcal{O}(l)$ に対して,

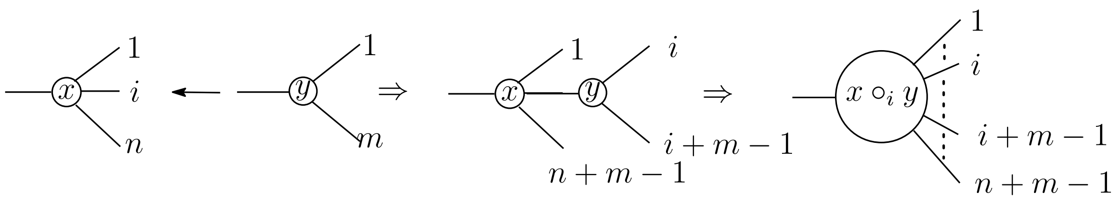
$$x \circ_i (y \circ_j z) = (x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$$
$$(x \circ_j z) \circ_i y = (x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

2. 単位元 $1 \in \mathcal{O}(1)$ があり, $x \in \mathcal{O}(n)$ に対して, $x \circ_i 1 = x,\ 1 \circ_1 x = x$.

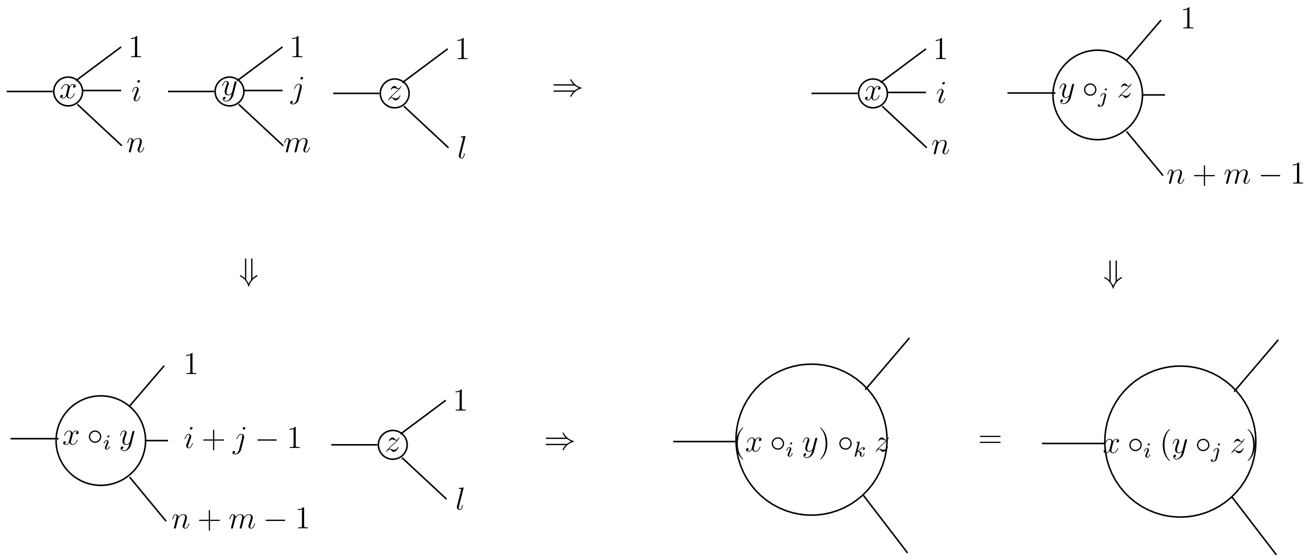
感覚的には $\mathcal{O}(n)$ の元は n 項演算を表す. 合成に関する定義 1 の結合律の意味は, tree を使うとわかりやすい. $x \in \mathcal{O}(n)$ を次のような n 枚の leaf を持つ tree とみなす.



すると, 部分合成 $(-\circ_i -)$ は次のような tree の結合とみなせる.



定義 1 の結合律の一つ目の式は, 次のように三つの元の合成の結果が合成を取る順序によらないことを意味する.



結合律のもう一つの式は x に対して y, z を並列に合成した結果が順序によらないことを意味する.

定義 2. (right) $\mathcal{O}$-module Y とは,

1. $\mathcal{C}$ の対象の列 $Y(1),\ Y(2),\ Y(3),\ \ldots,\ Y(n),\ \ldots$
2. partial composition $(- \circ_i -) : Y(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to Y(n+m-1) \qquad (1 \le i \le n)$
3. 対称群 Σ_n の $Y(n)$ への作用

で，operad と同様の条件を満たすものである．作用に関しては，leaf の番号の付け替えと解釈し，自然な条件を課す.

定義 3. (left) $\mathcal{O}$-comodule X とは,

1. $\mathcal{C}$ の対象の列 $X(1),\ X(2),\ X(3),\ \ldots,\ X(n),\ \ldots$
2. partial composition $(- \circ_i -) : \mathcal{O}(n) \otimes X(n+m-1) \to X(m) \qquad (1 \le i \le n)$
3. 対称群 Σ_n の $X(n)$ への作用

で $\mathcal{O}$-module の双対に当たる条件を満たすもの.

定義 4. $\mathcal{TOP}_*$：基点付き位相空間の圏
スペクトラム X とは,

1. 基点付き空間の列 $X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_k,\ \ldots$
2. 基点を保つ写像 $S^1 \wedge X_k \to X_{k+1}$

スペクトラの間の射 $f : X \to Y$ とは，$\{f_k : X_k \to Y_k \in \mathcal{TOP}_*\}_k$ で，上の写像と可換なもの.

$\mathcal{SP}$：スペクトラのなす圏

homotopy group $\pi_i(X) = \mathrm{colim}(\pi_i(X_0) \to \pi_{i+1}(X_1) \to \pi_{i+2}(X_2) \to \cdots)$
(写像は次で定める：$\pi_{i+k}(X_k) = [S^{i+k}, X_k] \to [S^1 \wedge S^{i+k}, S^1 \wedge X_k] \to [S^{i+k+1}, X_{k+1}] = \pi_{i+k+1}(X_{k+1})$)

$f : X \to Y$ が stable homotopy equivalence $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, i \quad f_* : \pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$

$U \in \mathcal{TOP},\ X \in \mathcal{SP}$ に対して，$U \hat{\otimes} X \in \mathcal{SP}$ を $\qquad (U \hat{\otimes} X)_k = U \times X_k / U \times \{*\}$ で定める.

$\mathcal{O}$ ：topological operad．$\mathcal{SP}$ における $\mathcal{O}$-comodule X とは,

1. $\mathcal{SP}$ の対象の列 $X(1),\ X(2),\ \ldots$
2. $(- \circ_i -) : \mathcal{O}(m) \hat{\otimes} X(m+n-1) \to X(n)$

からなる.

2 主定理

$\widehat{M} := STM$: M の接球面束

$\mathsf{G}(n) := \{G \subset \{1, \ldots, n\}^{\times 2} \mid (i,j) \in G \Rightarrow i < j\}$

$G \in \mathsf{G}(n)$ を，$\{1, \ldots, n\}$ を頂点集合，G 自身を辺集合とするグラフとみなす.

$G \in \mathsf{G}(n)$ に対して $\Delta_G :=$ pull back of $(\widehat{M}^{\times n} \to M^{\times n} \leftarrow M^{\times \pi_0(G)})$

自然に $\Delta_G \subset \widehat{M}^{\times n}$ とみなす．$G \subset H \Rightarrow \Delta_H \subset \Delta_G$

$H_G^* := H^*(\Delta_G)$

$\Lambda(g_{ij})$：free bigraded commutative alg. generated by g_{ij} $\ (1 \leq i < j \leq n)$ with $|g_{ij}| = (-1, \mathbf{d})$

$G = \{(i_1, j_1) < \cdots < (i_r, j_r)\} \in \mathsf{G}(n)$ に対して　$g_G := g_{i_1,j_1} \cdots g_{i_r,j_r} \in \Lambda(g_{ij})$

bigraded commutative algebra $\tilde{A}^{\star *}_M(n) := \bigoplus_{G \in \mathsf{G}(n)} H^*_G g_G$

($\#G = r$, $a \in H^l_G$ のとき，$|a g_G| = (-r, l + \mathbf{d}r)$)

$$a g_G \cdot b g_H = \begin{cases} \pm(a \cdot b) g_{G \cup H} \in H_{G \cup H}\, g_{G \cup H} & (G \cap H = \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(ここで，積 $a \cdot b$ は $H^*_{G \cup H}$ で取る．)

$J(n) \subset \tilde{A}^{\star *}_M(n)$：次の元で生成されるイデアル

$$a(g_{ij} g_{jk} + g_{jk} g_{ki} + g_{ki} g_{ij}) g_G, \qquad b g_H$$

ここで，$G, H \in \mathsf{G}(n)$，H は tree でない，$a \in H_{G \cup \{(i,j),(j,k)\}}, b \in H_H$.
また，$i > j$ のとき，便宜上 $(i,j) = (j,i)$，$g_{ij} = (-1)^{\mathbf{d}} g_{ji}$ とおく．Δ_G は $\pi_0(G)$ のみに依存するので，$a \in H_{G \cup \{(jk),(ki)\}} = H_{G \cup \{(k,i),(i,j)\}}$ とみなす.

定義 5. diff. bigraded comm. alg $A^{\star *}_M(n) := \tilde{A}^{\star *}_M(n)/J(n)$

微分 $\partial : A^{\star *}_M(n) \to A^{\star+1,*}_M(n)$ を次のように定める.

$$\partial(a g_G) := \sum_{t=1}^{r} \pm(\gamma_{i_t,j_t} \cdot a) g_{i_1,j_1} \cdots \check{g_{i_t j_t}} \cdots g_{i_r,j_r}$$

ここで，$\gamma_{i,j} \in H^{\mathbf{d}}(\Delta_{G-\{i,j\}}, \Delta^c_G)$：$\Delta_G$ の管状近傍の Thom class.
(G が tree であるような代表元を取って定める．)

$A^{\star *}_M = \{A^{\star *}_M(n)\}$ 上の $\mathcal{A}$-comodule の構造を次のように定める.
$\mu \in \mathcal{A}(2)$：固定された生成元

$$\mu \circ_i (a g_G) := \begin{cases} \Delta^*_i(a) g_H & (\text{if } i \text{ and } i+1 \text{ is disconnected in } G) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで，$H \in \mathsf{G}(n-1)$ は G から頂点 i と $i+1$ を同一視して得られるグラフ，$\Delta_i : \Delta_H \to \Delta_G$ は i-th diagonal $\widehat{M}^{\times n-1} \to \widehat{M}^{\times n}$ の制限.

主定理 6. M：単連結，閉，$\mathbf{d} \geq 4$ とする．次のようなスペクトル系列 $\{\check{\mathbb{E}}^{pq}_r\}$ が存在する.

1. $H^*(\mathrm{Emb}(S^1, M))$ に収束する．

2. $(\check{\mathbb{E}}_1, d_1)$ は $\mathrm{CH}_\bullet(A_M^{\star *})$ と *quasi-isomorphic.*

註釈 7. $\boldsymbol{k}$ が体のとき，$A_M^{\star *}$ はコホモロジー環 $H^*(M)$ にのみ依存する．

註釈 8. $\check{\mathbb{E}}_r$ の元は $H^*(\Delta_G)$ のサイクルで表され，比較的扱いやすい代表元を取れる．実際，long knot の場合に類似のスペクトル系列の d_2 を計算して，Salvatore の「little 2-disks operad が $ch(\boldsymbol{k}) = 2$ のとき formal ではない」という命題の別証を得られる．他の多様体の場合も計算可能な例があるのではないかと期待できる．

3　配置空間の CDGA-モデル

この節では Idrissi[3] による配置空間のモデルを紹介する．多様体が平行化可能な場合には，配置空間の集まりに little disks operad 上の加群の構造を講演で紹介したものと同様に入れることができ，この場合にはこのモデルは一つの空間の実ホモトピー型だけでなく，オペラッド上の加群としてのモデルでもある．類似のモデルは Campos-Willwacher[1] によっても与えられている．ただし，この加群と埋め込みの空間との具体的な関連性は講演者には不明である．より具体的に関連しているのは frame 付き配置空間のなす加群で，このモデルは Campos-Ducoulombier-Idrissi-Willwacher[2] によって与えられている．例えば，枠付き結び目の空間はこのモデルから復元できると思われる．(しかし，講演者の理解不足のためこれについては紹介しない．)

CDGA とは，commutative differential graded algebra のこと．

以下，$\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ とする．

Hopf cooperad とは，CDGA のモノイダル圏におけるオペラッドの双対概念 (モノイダル積は $\otimes_{\mathbb{R}}$)
また，この節での comodule は cooperad 上の right comodule であり，第 1 節のものとは異なる．

$e_{\mathbf{d}}^{\vee}$: little $\mathbf{d}$-disks の cohomology のなす Hopf cooperad

$e_{\mathbf{d}}^{\vee}(n) = \Lambda(g_{ij})/((g_{ij})^2 = 0, g_{ij} = (-1)^{\mathbf{d}} g_{ji}, \text{3-term rel.})$

$\circ_i^{\vee} : e_{\mathbf{d}}^{\vee}(m+n-1) \to e_{\mathbf{d}}^{\vee}(n) \otimes e_{\mathbf{d}}^{\vee}(m)$

$$g_{pq} \longmapsto \begin{cases} g_{p,q} \otimes 1 & (p < q < i) \\ g_{pi} \otimes 1 & (1 \le p < i \le q \le i+m-1) \\ g_{p,q-m+1} \otimes 1 & (p < i, i+m-1 < q) \\ 1 \otimes g_{p-i+1,q-i+1} & (i \le p < q \le i+m-1) \\ g_{i,q-m+1} \otimes 1 & (1 \le p \le i+m-1 < q) \end{cases}$$

次元 $\mathbf{d}$ の Poincaré duality CDGA (PD-CDGA) とは，

1. CDGA A
2. 線形写像 $\epsilon : A^{\mathbf{d}} \to \mathbb{R}$

で，次の条件を満たすもの．

1. $\epsilon \circ d = 0$
2. $\langle -, - \rangle : A^k \otimes A^{\mathbf{d}-k} \to \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle = \epsilon(a \cdot b)$ が非退化．

定理 9 (Lambrechts-Stanley)**.** *M : 単連結，閉，次元* $\mathbf{d}$.
次元 $\mathbf{d}$ *の PD-CDGA, A が存在して，$\Omega_{DR}(M)$ と A は CDGA として弱同値である．すなわち，二つをつなぐ積と単位元を保つ quasi-isomorphism のジグザグが存在する．*

ここで，Ω_{DR} は微分形式のなす複体を意味する．

A : PD-CDGA of dim. $\mathbf{d}$

CDGA $G_A(n) := \{A^{\otimes n} \otimes e^\vee_{\mathbf{d}}(n)/(\iota_i(a)g_{ij} = \iota_j(a)g_{ij});\ dg_{ij} = \iota_{ij}(\Delta_A)\}$
ここで，$\iota_i : A \to A^{\otimes n},\ a \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes 1$, $\iota_{ij}(a \otimes b) = \iota_i(a) \otimes \iota_j(b)$
$\Delta_A = \sum (-1)^{|a_i|} a_i \otimes a_i^*$ ($\{a_i\}$: A の基底, $\langle a_i, a_j^* \rangle = \delta_{ij}$)

定理 10 (Idrissi)**.** *M, A :Thm. 9 と同じ*
$G_A(n)$ と $\Omega^*_{DR}(Conf_n(M))$ は CDGA として弱同値である．

ここで，$Conf_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^{\times n} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$.

$\chi(A) = \langle -, - \rangle(\Delta_A) \in \mathbb{R}$ とおく．
$\chi(A) = 0$ のとき，$\{G_A(n)\}$ は次のような right $e^\vee_{\mathbf{d}}$-comodule の構造を持つ．

$$\begin{aligned} \circ_i^\vee : A^{\otimes n+m-1} \otimes e^\vee_{\mathbf{d}}(n+m-1) &\longrightarrow (A^{\otimes n} \otimes e^\vee_{\mathbf{d}}(n)) \otimes e^\vee_{\mathbf{d}}(m) \\ a_1 \otimes \cdots a_{n+m-1} &\longmapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \cdots a_{i+m-1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1} \\ e^\vee_{\mathbf{d}}(n+m-1) \ni \omega &\longmapsto \circ_i^\vee(\omega) \in e^\vee_{\mathbf{d}}(n) \otimes e^\vee_{\mathbf{d}}(m) \qquad (e^\vee_{\mathbf{d}} \text{の cocomposition}) \end{aligned}$$

定理 11 (Idrissi)**.** *M：単連結，閉，平行化可能，次元 $\mathbf{d}$． A : Thm. 9 と同じ．$(G_A, e_{\mathbf{d}}^{\vee})$ は Hopf comodule として $(\Omega^*_{DR}(FM_M), \Omega^*_{DR}(FM_{\mathbf{d}}))$ と弱同値である (構造を保つ quasi-isom. のジグザグでつなげる).*

ここで，$FM_{\mathbf{d}}$ は $Conf_n(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ の Fulton-MacPherson コンパクト化を集めてできる operad であり，FM_M は $Conf_n(M)$ から同様に得られる right $FM_{\mathbf{d}}$-module である．

参考文献

[1] R. Campos, T. Willwacher, *A model for configuration spaces of points,* arXiv:1604.02043 (2016).

[2] R. Campos, J. Ducoulombier, N. Idrissi, T. Willwacher, *A model for framed configuration spaces of points,* arXiv:1807.08319 (2018).

[3] N. Idrissi, *The Lambrechts–Stanley model of configuration spaces,* Inventiones mathematicae, 216.1 (2019): 1-68.

[4] S. Moriya, *Models for knot spaces and Atiyah duality,* arXiv:2003.03815 (2020).