２０２１年９月１０日　研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」

メタ群論・メタ群作用とそれらの幾何学 (1)

高村茂　京都大学理学研究科数学教室

この連続講演では、著者の最近の研究—“メタな” 視点から群論や群作用をとらえ直し、それらに付随する幾何学の構成を紹介する。これは群環の高次化に関わっており、一種の非可換幾何学と言える。天下り的にあれこれ定義すると、意義がわかりにくいと思われるので、一回目の講演では、主に動機付けやメタ群論に付随する幾何の構成を与え、二回目の講演では、メタ群作用に付随する幾何の構成を紹介する予定である。

少し注意しておくと、群に対する幾何を、環に対する幾何（スキーム論、代数幾何）のアナロジーとして安易に構成しようとしてもうまくいかない。スキーム論で基本的な役割を果たす「環の局所化」は、環の元 f の逆元 f^{-1} を付加する操作であるが、群の場合はすべての元が逆元をもつので、新たな元が産出されることはない。したがって、環に対するアフィン・スキームのようなものを、群に対して安易に構成しようとしても不毛である—構造層にあたるものが構成できない。逆元を持つということがネックになり、すべての ‘関数’ が極を持たない、つまり正則となり、有理関数のない荒涼とした世界となってしまう。なんでもかんでも、アナロジーがうまく行けば話はラクだが、そうはなっていないのである。

我々のアプローチは、アフィン・スキーム Spec(R) やその構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ のアナロジーを無理に見いだそうとするのではなく、部分群ポセットを拡張した “メタな” ポセットやそれによって生成される非可換環を構成し、基本的な幾何的対象とする。この非可換環は群環を “高次へ” 拡張したもので、次数付きである（0 次成分が群環）。また、我々の文脈では、局所化の役割は、あえて言うなら、メタなポセットの involution あるいはその固定点集合に置き換わる。群の部分集合 S に対し、その「メタな逆元」を $S^{-1} := \{s^{-1} : s \in S\}$ と定めると、$S \mapsto S^{-1}$ が上述の involution である。これの固定点集合が重要である。実際、S の「メタな２乗」を $S^2 := \{st : s, t \in S\}$ で定めると、メタなポセットにおいて、$S \mapsto S^2$ の固定点集合と $S \mapsto S^{-1}$ の固定点集合の共通部分がちょうど部分群ポセットに一致する。このことから、この２つのポセット写像のレフシェッツ数が、群の不変量として重要であることがわかる。この他にも、我々の文脈で、群の新たな不変量の系列が産み出される。たとえば、メタなポセットを小圏とみたとき、その分類空間のコホモロジーや、上に挙げた（次数付き）非可換環のホッホシルト・コホモロジーなど。（注：　以上は、いわば “アフィンな” 場合の話である。これのグローバル化、つまり非アフィンな場合の構成は圏論的に行われる。）

我々の哲学は、群環（0 次）、部分群やコセット（1 次）だけではなく、より「高次」のものを導入し、それらもひっくるめた “幾何” を構築して、その中で、0 次や 1 次の「古典的な」ものをとらえ直そう、というものである。Burnside 環などに対しても、この文脈で新たな見方ができるのではと期待している。