

2021年9月11日 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」

メタ群論・メタ群作用とそれらの幾何学 (2)

高村茂 京都大学理学研究科数学教室

まず、講演(1)の要旨で書き切れなかった背景的なことを少し書いておく。代数幾何学のブローダウンは、代数多様体の例外集合をつぶす操作であるが、群論でこれにあたるものは、群を正規部分群でつぶすこと、つまり商群を作る操作である。極小モデルにあたるものは、群論では単純群である—「それ以上つぶせない」という点でアナロジーになっている。さて、与えられた群に対し、“正規部分群をつぶす”ブローダウンは、部分群ポセットのあいだのポセット写像(ポセット・ブローダウン)を誘導する。与えられた群の部分群ポセットから出発して、次々にポセット・ブローダウンを施すと、部分群ポセットはどんどんつぶれて小さくなり、最終的に単純群の部分群ポセットになる。有限群の場合、部分群ポセットはグラフ(ハッセ図)で描かれるので、これはハッセ図がつぶれてゆくプロセスとなっていて、組み合わせ的にも興味深い。詳しくは、S. Takamura “Blowdown maps between subgroup posets”, to appear from Tokyo Journal of Math. 参照。この仕事の続編でポセット・ブローダウンの一般化を与えるが、その際、講演(1)の要旨で述べた“高次化”が自然に現れる。

さて、講演(2)では、メタな視点から群作用をとらえ直し、それに伴う幾何を導入する。空間への群作用が与えられたとき、まず、この空間を“高次まで”拡張して次数付きポセットを構成する(軌道ポセット)—正確に言うと、ここでの「次数付きポセット」は通常の設定より広い意味で使っている。軌道ポセットの0次成分はもとの空間で、1次成分は部分群あるいはコセットによる軌道からなり、2次成分は、そのような軌道の軌道からなり、3次成分は、軌道の軌道の軌道からなる、というように軌道ポセットは、帰納的に定義される。軌道ポセットは群作用の立場からの「空間の変形」である。次に、群を“高次まで”拡張して得られた次数付きモノイドを軌道ポセットへ作用させる。ここで、軌道ポセットの0次成分(つまり、もとの空間)への作用は、はじめに与えられた群作用に一致する。したがって、軌道ポセットへのモノイド作用は、与えられた群作用の「高次への変形」になっているとみなせる。