グラフのマグニチュードホモロジー

浅尾泰彦（福岡大学）

August 17, 2022

Abstract

マグニチュードホモロジー（以下 MH）は「マグニチュード」と呼ばれる有限距離空間（距離関数を備えた有限集合）に対して定まる量の圏化として定義された．本講演では基本的に有限距離空間として無向グラフまたは有向グラフを扱う．これらには 2 頂点間の最短パスの長さによって距離が定まるが, それは対称とも限らず ∞ 値を許すため, ここでは通常よりも一般化された距離空間を扱う．その利点の 1 つとして, 超平面配置の特性多項式を MH の文脈で扱えることが挙げられる.

グラフのマグニチュードは 2000 年代に Leinster によって定義された形式的べき級数に値を取る量で, 単体複体の Euler 標数を圏論的な観点から距離空間に翻訳した概念であると言える．マグニチュードの ℓ 次項の係数がベッチ数の交代和となるようなホモロジー MH^{ℓ}_{*} が Hepworth-Willerton によって定義され, それを MH と呼んでいる．これは Euler 標数がホモロジーのベッチ数交代和で得られることと対応する．つまり MH の出自は距離空間に対する圏論的な立場からのホモロジー論のアナロジーであり, 講演者の興味は「それが幾何学にとってどのような意味を持つのか」という点にある．もう少し具体的には大きく分けて次の 2 つの問題を考えている：

(1) MH は距離空間（グラフ）の幾何学的性質をどのように反映しているのか.

(2) 既存の不変量とどのような関係にあるのか.

本講演の前半では MH の導入をした後, (1) について最近の進展を紹介する．端的に述べると「グラフの内周によって MH の自明・非自明性を記述できる」ということが主な主張である．後半では (2) について最近の進展を紹介する．具体的にはパスホモロジーと呼ばれるグラフのホモロジー論, 及び Hochschild ホモロジーの文脈から MH をうまく説明できることについて述べる．この後者の帰結から MH は「距離空間の incidence algebra の HH」として扱える．これは Leinster-Shulman による $\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$-enriched category の HH としての解釈とも整合的である.