その I．L-S カテゴリ数

— A_∞ 理論から —

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺（信州大学）

岩瀬 則夫

九州大学数理学研究院

31 Aug 2022

Contents

L. Lusternik – L. Schnirelmann '34

- X — 連結な空間
- M — 閉多様体
- $C^\infty(M)$ — M 上の C^∞ 級実関数の全体

記号. ① $\mathrm{crit}(f) = \sharp\{\, x \in M \mid x \text{ is a critical point of } f \,\},\ f \in C^\infty(M)$

② $\mathrm{Crit}(M) \leq m \iff \exists f \in C^\infty(M)\ \ \mathrm{crit}(f) \leq m$

定義. $U \subset X$ が猫的 $\iff$ 包含写像 $U \hookrightarrow X$ が零ホモトープ

定義. $\mathrm{cat}(X) \leq m \iff m{+}1$ 枚の猫的開集合が X 全体を覆う。

定理. $\mathrm{cat}(X)$ はホモトピー不変量で次を満たす。

$$\mathrm{cat}(M){+}1 \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \dim M{+}1$$

注. 関数を morse function に制限すると critical points の個数の最小値はセルの個数以下

例. ① $\mathrm{cat}(X) = 0 \iff X$ は可縮 ② $\mathrm{cat}(X) \leq 1 \iff X$ は co-H-空間 ③ $\mathrm{cat}(S^n) = 1$

Upper bounds

用語 (Fox '39 '41). $\mathrm{gCat}(X) \le m \iff m{+}1$ 枚の可縮な開集合が X 全体を覆う。

用語 (Singhof '79). $\mathrm{Ball}(M) \le m \iff m{+}1$ 枚の開球が M 全体を覆う。

定理 (L-S '34, Takens '68, Fox '39,'41, Singhof '79). 次が成立する。

$$\mathrm{cat}(M) \le \mathrm{gCat}(M) \le \mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M){-}1 \le \dim M$$

定義 (Fox). $\mathrm{catlen}(X) \le m \iff \exists\{\,F_i \text{ closed in } X\,\}_{0\le i\le m}$ は X の cat. seq. すなわち $\{*\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = X$ かつ $F_0, F_1 \smallsetminus F_0, \ldots, F_m \smallsetminus F_{m-1}$ はすべて猫的である。

定義 (Ganea '67). ❶ $\mathrm{Cat}(X) \le m \iff \exists Y \simeq X\ \ \mathrm{gCat}(Y) \le m$

❷ $\mathrm{Cl}(X) \le m \iff \exists\{* \in Y_1 \subset \cdots \subset Y_m \simeq X\}\ \exists\{h_i : K_i \to Y_i\}\ \ Y_{i+1} = Y_i \cup_{h_i} CK_i$

定理 (Ganea). $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)\ \&\ \mathrm{Cat}(X){-}1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X)$

G. Whitehead '56

- X — 連結な空間
- $\Delta^m : X \to \prod^m X$ — 対角線写像
- $\mathrm{T}^m X = \{(x_i) \mid \exists i\ x_i = *\}$

$F \hookrightarrow X$ を closed cofibration とする。もし F が猫的であったならば零ホモトピー（$I = [0,1]$）$H : F \times I \to X$ は X の変形 $R : X \times I \to X$ で次を満たすものに拡張される：

1. $R|_{F\times I} = H$,
2. $R(-,0) = \mathrm{id} : X \to X$,
3. $R(-,1)|_F : F \to \{*\} \subset X$.

X が猫的な closed cofibration の族 $\{F_i \hookrightarrow X\}$ で覆われれば、X の変形の族 $\{R_i : X \times I \to X\}$ で

1. $X = \bigcup_i F_i$
2. $R_i(-,0) = \mathrm{id} : X \to X$,
3. $R_i(-,1)|_{F_i} : F_i \to \{*\} \subset X$.

を満たすものが取れる。そこで $R : X \times I \to \prod^m X$ を次で定める：

$$R(x,t) = (R_1(x,t), \dots, R_m(x,t))$$

このとき上の条件から $R(x,0) = \Delta^m(x)$ と $r(x) := R(x,1) \in \mathrm{T}^m X$（fat wedge）が従う。

定義 (Whitehead). $\mathrm{cat}(X) \le m \iff \Delta^{m+1}$ の行き先は fat wedge まで圧縮できる。

Higher Hopf invariant by I. Berstein - P. J. Hilton ’60

- $(\prod^{m}(K,L), \mathrm{T}^{m}(K,L)) = (K,L)^m$
- $X \supset K \supset L \supset A$

定義 (Berstein - Ganea ’61, Arkowitz - Lupton ’91, Fadell - Husseini ’94, I.’09)

$$\mathrm{cat}(X;K,L:A) \le m \iff \left(\begin{array}{l} \Delta^{m+1} : K \to \prod^{m+1}(K,L) \text{ が } X \text{ の中で } A \text{ 相対ホモトピーに} \\ \text{より写像 } r : K \to \mathrm{T}^{m+1}(K,L) \subset \prod^{m+1}(K,L) \text{ に圧縮される。} \end{array} \right)$$

記号. $\nu_{m+1} : \Sigma K \to \Sigma K \vee \cdots \vee \Sigma K \subset \mathrm{T}^{m} K$ を余積の多重合成とする。

定義 (高次 Hopf 不変量 Berstein - Hilton). $f : V = \Sigma K \to Y$（$\mathrm{cat}(Y) \le m$）に対して $\mathrm{T}^{m+1} f \circ \nu_{m+1}$ と $r \circ f$ の ‘差’ を $H^r_m(f) \in [K, \Omega Y * \cdots * \Omega Y]$ とし、$H_m(f) = \{H^r_m(f) \mid r : Y \to \mathrm{T}^{m+1} Y$ は $\mathrm{cat}(Y) \le m$ を与える写像$\}$ と置く。（$\mathrm{T}^{m+1} f \circ \nu_{m+1}$ と $r \circ f$ は $\prod^{m+1} Y$ で一致する）

定理 (Berstein - Hilton). $X = Y \cup_f CK, \mathrm{cat}(Y) \le m, H_m(f) \ni 0 \implies \mathrm{cat}(X) \le m$

Lower bounds

- X — 連結な空間
- h^* — 一般コホモロジー論
- $\bar{\Delta}^m : X \to \overset{m}{\wedge} X$ — 簡約対角線

定義 (Whitehead, Berstein, Ganea, James, Singhof, Rudyak, ...).

1. $w\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \bar{\Delta}^m \text{ is non-trivial up to homotopy} \right\}$
2. $\mathrm{cup}(X, h) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; h^*(\bar{\Delta}^m) \neq 0 \right\}$
3. $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \bar{\Delta}^m \text{ is stably non-trivial} \right\}$

注意. h^* が乗法的で $h^*(X)$ が自由ならば、$\mathrm{cup}(X;h)$ は非自明なカップ積の最大長である。

記法. $h^* = H^*(-;R)$（R は可換環）のとき、$\mathrm{cup}(X;h)$ を $\mathrm{cup}(X;R)$ と表す。

定理. $\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{cup}(X) \leq w\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$

Q．閉多様体、あるいは特に Lie 群の L-S カテゴリ数はどうなるの？（Ganea の問題４ ?)

定理 (Singhof '75-'76). 1. $\mathrm{cat}(U(n)) = n$, 2. $\mathrm{cat}(SU(n)) = n-1$.

Category weight by E. Fadell and S. Husseini ’92

- X — 連結な空間
- h^* — 一般コホモロジー論
- $L^n(p) = S^{2n-1}/C_p$

定義. $\mathrm{cwgt}(u;h) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \mid \forall K \underset{\text{closed}}{\subset} X \ \ \mathrm{cat}(X;K) \leq m \implies u|_K = 0 \text{ in } h^*(K) \right\}$,
$u \in h^*(X)$ ただし、$\mathrm{cat}(X;K) = \mathrm{cat}(X;K,*:*)$ とする。（cwgt はホモトピー不変量ではない）

任意の写像 $f : K \to X$ は closed cofibration $j : K \hookrightarrow \hat{X} \simeq X$ として表せるから、
$\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(\hat{X};K)$ と定めることができる。

定義 (Rudyak ’98, Strom ’97).

1. $\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\{ m \geq 0 \mid \forall f : K \to X \ \ \mathrm{cat}(f) < m \implies f^*(u) = 0 \text{ in } h^*(K) \}$, $u \in \tilde{h}^*(X)$
2. $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{wgt}(u;h) \mid u \in \tilde{h}^*(X) \right\}$
3. $\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\{ \mathrm{wgt}(X;h) \mid h \}$

例 (Fadell - Husseini ’92). $\mathrm{cwgt}(L^n(p)) = 2n-1$ より $\mathrm{cat}(L^n(p)) = 2n-1$ を得る。

定理 (Fadell - Husseini). $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) \leq \mathrm{cat}(X) = \mathrm{catlen}(X) \leq \mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$

A_∞ 理論から

- X — 連結な空間
- $G = \Omega X$ — ループ空間
- h^* — 一般コホモロジー論

定理 (Stasheff '70). A_∞ 空間 G は射影空間 $P^m G, m \geq 0$ を持ち、$P^\infty G \simeq X$ を満たす。

定理 (Cornea, '94). $\mathrm{cat}(P^m \Omega X) \leq \mathrm{Min}\{m, \mathrm{cat}(X)\}$

定理 (Ganea, I). $\mathrm{cat}(X) \leq m \iff e^X_m : P^m G \hookrightarrow P^\infty G \simeq X$ が右ホモトピー逆写像をもつ。

注 (Miyata, '19). Stasheff の射影空間と Ganea の fibre-cofiber 構成は見かけは異なるが homotopy difference の議論で同一であると分かる。（※[CLOT] にある演習問題は誤り！）

定義 (Kono - I '07). $\emptyset \neq \Lambda \subset h^*h$ とする。

1. $\mathrm{Mwgt}(X;\Lambda) = \mathrm{Max}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, e^* : \tilde{h}^*(X) \to \tilde{h}^*(X) \text{ の像は } \Lambda\text{-直和因子} \right\}$
2. $\mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{Mwgt}(X;h^*h) \,\middle|\, h : \text{一般コホモロジー論} \right\}$

定理 (Kono - I). $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) \leq \mathrm{Mwgt}(X) \leq \mathrm{cat}(X) = \mathrm{catlen}(X) \leq \mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$

例と Ganea の問題 ’71

- $f : K \to Y$ — 写像
- K — 懸垂空間
- $\mathrm{cat}(Y) \leq m$
- $X = Y \cup_f CK$

例 (Kono-I ’07). まず $\Omega\,\mathrm{Spin}(9)$ への mod 2 コホモロジー作用素の作用（Kono-Kojima）から $8 \leq \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathcal{A}_2) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))$ を得る。その一方、cell structure を良く見れば $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) \leq \mathrm{Cl}(\mathrm{Spin}(9)) \leq 9$ であり、コファイバー列 $\Sigma K \xrightarrow{f} Y \hookrightarrow \mathrm{Spin}(9)$（$\mathrm{cat}(Y) \leq 8$）が存在する。ここで $H_m(f) = 0$ が判る（！）から、$\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) \leq \mathrm{catlen}(\mathrm{Spin}(9)) \leq 8$ を得る：

$$\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathbb{F}_2) = 6 < 8 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathcal{A}_2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) = \mathrm{catlen}(\mathrm{Spin}(9))$$

Ganea の問題２. co-H-空間は円周幾つかと単連結空間の一点和にホモトピー同値か？

Ganea の問題１０. $\mathrm{cat}(S^n) = 1$ であることから $\mathrm{cat}(X \times S^n) = \mathrm{cat}(X) + 1$ は従うか？

定理 (I ’01 ’98). 二つの問題は共に反例が構成できる。２は $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = 0$, $a + b = 1$ mod 24 を整数の範囲で解くことに帰着し、１０の方は球面写像の結合と懸垂の問題になる。

その２．位相的複雑さ

— A_∞ 理論から —

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺（信州大学）

岩瀬 則夫

九州大学数理学研究院

1 Sep 2022

Topological Complexity

- X — ロボットの状態空間（以下、X は連結を仮定する）
- $\mathcal{P}X$ — X の中に描かれた道（ロボットの動作）の全体 — $\mathcal{P}X \supset \mathcal{L}X \supset \Omega X$
- $\varpi : \mathcal{P}X \to X \times X \iff \varpi(\ell) = (\ell(1), \ell(0))$（道の終着状態と出発状態）
- $\pi : P \to W$ — （全射）連続写像

記法 (ここだけ). $O \subset W$ が π-猫的 $\iff$ π は O 上の section を持つ。

定義 (Švarc '58). $\mathrm{genus}(\pi) \leq n \iff \pi$-猫的な開集合 $n{+}1$ 枚が W を覆う。

定義. $\mathrm{tc}(X) := \mathrm{genus}(\varpi)$（位相的複雑さ）

O 上の section は局所的な動作設計を与え、$\mathrm{tc}(X)$ はロボットの動作設計の複雑さを表す。

定理 (Farber '03). $\mathrm{tc}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \mathrm{Imm}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) - \delta_n, \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 3, 7 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$

L-S category and Topological Complexity

- $\mathcal{P}_0X = \varpi^{-1}(X \times \{*\})$ — X の基底状態「$*$」から出発する道（ロボットの動作）の全体
- $\varpi_0 : \mathcal{P}_0X \to X \iff \varpi_0(\ell) = \ell(1)$（道の終着状態）$\iff \varpi_0 = \varpi|_{\mathcal{P}_0X}$

命題. $U \subset X$ が ϖ_0-猫的 $\iff$ 包含写像 $U \hookrightarrow X$ が零ホモトープ

系. $\mathrm{cat}(X) \leq m \iff m{+}1$ 枚の ϖ_0-猫的な開集合が X 全体を覆う。

定理 (Farber '03). $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{tc}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X) \leq 2\,\mathrm{cat}(X)$

例. ❶ $\mathrm{cat}(X) = 0 \iff X$ は可縮 ❷ $\mathrm{tc}(X) = 0 \iff X$ は可縮

❸ $\mathrm{cat}(X) \leq 1 \iff X$ は co-H-空間 ❹ $\mathrm{cat}(S^n) = 1$ ❺ $\mathrm{tc}(S^n) = 1 \iff n$ は奇数

Q．Lie 群あるいは一般の多様体の位相的複雑さは分かるの？

事実. G が Lie 群あるいは H 空間 $\Longrightarrow \mathrm{tc}(G) = \mathrm{cat}(G)$

Lower bound

定義 (Farber '03, Farber - Grant '08).

1. $I_\varpi(R) = \ker\{\,\Delta^* : H^*(X\times X;R)\to H^*(X;R)\,\}$
2. $\mathcal{Z}_\varpi(X;R) = \mathrm{Max}\{\,m{\geq}0 \mid I_\varpi(R)^m \neq 0\,\}$
3. $\mathrm{wgt}_\varpi(u;R) = \mathrm{Max}\{\,m\geq 0 \mid \forall f:Y\to X\times X\ (\mathrm{genus}(f^*\varpi){<}m),\ f^*(u)=0\,\}$

定理 (Farber - Grant '08). $\mathrm{wgt}_\varpi(u;R)\leq \mathrm{tc}(X)$ for a non-zero $u\in I_\varpi(R)\subset H^*(X\times X;R)$.

Q．$\mathrm{cd}\,G<\infty$ となる離散群 G の（分類空間の）位相的複雑さは分かるの？

Theorem (Švarc '66, Berstein '76, Rudyak - Dranishnikov '09). $\mathrm{cat}(X)=\dim X = n\geq 2$ のとき、$\pi=\pi_1(X)$ に対する Berstein class $\mathfrak{b}\in H^1(X,*;I(\pi))$ は $\mathfrak{b}^n\neq 0$ を満たす。ただし、$I(\pi)=\ker\{\varepsilon:\mathbb{Z}\pi\to\mathbb{Z}\}$（augmentation ideal）である。

上記を用いて Farber, Grant らが $\mathrm{tc}(BG)$（$\mathrm{cd}\,G<\infty$）に対する目覚ましい結果を得ている。

Fibrewise theory

用語. ❶ 連続写像 $p : E \to X$ に対して、組 $E = (E, p, X)$ を fibrewise 空間と呼ぶ。

❷ $p : E \to X$ に section $s : X \to E$ があるとき E を fibrewise 基点付き空間と呼び、s を E の（fibrewise）基点と呼ぶ。このとき、$p^{-1}(x)$ は $s(x)$ を基点とする基点付き空間である。

記号. $E = (E, p, X)$ と $E' = (E', p', X)$ を fibrewise 空間とする。

❶ E と E' の pullback は fibrewise 空間であり、これを $E \times_X E'$ と表す。

❷ fibrewise 基点付き空間 $G = (G, p, X)$ が fibrewise な積写像 $\mu : G \times_B G \to G$ と逆元 $\nu : G \to G$ をもって、結合性などの条件を満たすとき、G を fibrewise 群と呼ぶ。

❸ fibrewise cone $C_B E = \bigcup CE_b$, fibrewise suspension $\Sigma_B E = \bigcup \Sigma E_b$, fibrewise loop $\Omega_B X = \bigcup \Omega E_b$、あるいは fibrewise 群 G に対する fibrewise 射影空間 $P^m_B G = \bigcup P^m G_b$ が構成される。

注意. 上記の B のところに底空間 X を書くことも多いのだが、底空間の名前が長い場合や複雑な形をした場合にはかえって見にくくなるのでここではむしろ、単純に B と記す。

Fibrewise A_∞ 理論

- X — 位相空間
- $\mathcal{L}X$ — 自由ループ空間

定理 (Milnor '56). 分類空間 BG が X と弱同値となる位相群 G が存在する。

定理 (Stasheff '63). A_∞ 空間 ΩX は分類空間 $P^\infty\Omega X$ が X と弱同値となる。

(Benson). $EG\times_{\mathrm{ad}} BG$ が fibrewise 基点付き空間として $BG\times BG$ とホモトピー同値となる。ただし、$EG\times_{\mathrm{ad}} BG$ の基点は $[e]\mapsto[e,*]$ で与えられ、$BG\times BG$ の基点は diagonal map である。

- G — 離散群

定理. $\mathcal{L}BG$ は $EG\times_{\mathrm{ad}} G$ と fibrewise A_∞ 同値で、特に $P^n_B\,\mathcal{L}BG\simeq^B_B EG\times_{\mathrm{ad}} P^nG$

略証: ホモトピー同値（fibrewise A_1 同値）はすぐに分かる。また fibrewise A_n 同値となる為の障害は行き先が離散群であるので自明である。（上の (Benson) からも分かる (Miyata)） □

Q．それと位相的複雑さは一体どういう関係なの？

TC as a fibrewise L-S theory

- $E=(E,p,X,s)$ — 写像 $s:X\to E$ は、射影 $p:E\to X$ に対する section である。

定義. (I. James '95) $\mathrm{cat}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}}(E)\le m \iff \exists\sigma: E\to P^m_B\,\Omega_B\,E$ s.t. $\sigma\circ e_m \simeq^B_B \mathrm{id}$

(I-Sakai '10) $\mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(E)\le m \iff \exists\sigma: E\to P^m_B\,\Omega_B\,E$ s.t. $\sigma\circ e_m \simeq_B \mathrm{id}$

定理 (I-S '10). 連結な空間 X に対して $d(X)=(X{\times}X,\mathrm{pr}_1,X,\Delta)$ と置く。

1. $\Omega_B\,d(X)=\mathcal{L}X$
2. $\mathrm{tc}(X)=\mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(d(X))$
3. $\mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)=\mathrm{cat}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}}(d(X))$

注. $\mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)$ は $\mathrm{tc}(X)$ と同様に定義されるが、ロボットの動作設計に対して「出発状態と終着状態が同じ場合は動かない」という条件（monoidal condition）を課した位相不変量。

系 (I-S '10). $\mathrm{tc}(X)\le m \iff \sigma\circ e_m\simeq_B \mathrm{id}$ を満たす $\sigma: d(X)\to P^m_B\,\mathcal{L}X=P^m_B\,\Omega_B\,d(X)$ がある。

定理 (I-S '12). $\mathrm{tc}(X)\le \mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)\le \mathrm{tc}(X)+1$.

(Aguilar-Guzmán - González, '21?). X が ANR ならば $\mathrm{tc}(X)=\mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)$ である。

TC invariants as fibrewise L-S invariants

- R — 可換環、　Λ — コホモロジー作用素の集合
- $e_m : P^m_B\,\Omega_B\,E \hookrightarrow P^\infty_B\,\Omega_B\,E \simeq^B_B E$

定義 (James '95, I-S 10'). $H^*_B(E;R) := H^*(E,X;R)$ と置くと、次が成立する。

1. $\mathrm{cup_B}(X;R) = \mathrm{Max}\left\{m{\geq}0 \,\middle|\, H^*_B(E;R)^m \neq 0\right\}$
2. $\mathrm{wgt_B}(u;R) := \mathrm{Max}\{m \geq 0 \mid e^*_{m-1}(u) = 0\}$.
3. $\mathrm{wgt_B}(E;R) := \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid e^*_m : H^*_B(E;R) \to H^*_B(P^m_B\,\Omega_B\,E;R)$ is mono$\}$.
4. $\mathrm{Mwgt_B}(E;\Lambda) := \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \mathrm{im}\, e^*_m$ is a direct summand as a Λ-module$\}$.

定理 (I-S). $(E,p,X) = d(X)$ のとき、次が成立する。

1. $H^*_B(E;R) = I_\varpi(R)$
2. $\mathrm{cup_B}(X;R) = \mathcal{Z}_\varpi(X;R)$
3. $\mathrm{wgt_B}(u;R) = \mathrm{wgt}_\varpi(u;R)$

定理 (Cohen - Vandembrouq '17). K をクラインの壺とすると、$\mathrm{tc}(K) = 4$.

定理 (I - Sakai - Tsutaya '19). K_r を種数 $r{\geq}2$ の向き付け不可能閉曲面とすると、$\mathrm{tc}(K_r) = 4$.

球面空間形の TC

- $M = S^n/G$, G は有限群 — 位相的球空間形（技術的な理由で G は向きを保つとする）

注意. 多くの場合に $2n-1 \leq \mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(d(M)) \leq 2n$ しか（簡単には）分からない。

定理 (Miyata - I '22). z を M の orientation class に対応する $H^n(M;\mathbb{F}_2)$ の生成元とする。

1. 次の三条件は同値である。
   1. $\mathrm{wgt}_{\mathrm{B}}(z \otimes z;\mathbb{F}_2) = 2n$
   2. $\mathrm{wgt}_{\mathrm{B}}(d(M);\mathbb{F}_2) = 2n$
   3. $\mathrm{Mwgt}_{\mathrm{B}}(d(M);\mathcal{A}_2) = 2n$
2. 上記のどれかの条件が成立すれば $\mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(d(M)) = 2n$ である。（逆は多分無理！）

- $M = S^3/Q$, $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — 位数 8 の四元数群

注意. 上の M についてもすぐに分かるのは $5 \leq \mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(d(M)) \leq 6$ だけである。

主定理 (Miyata - I). $\mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(d(M)) = 6$.

主定理の証明の方針

$\mathrm{wgt_B}$ を決めるには $e_\infty : P^\infty_B \mathcal{L}M \to d(M)$ を知る必要がある。

— 実はこれが良く分からない —

それじゃ、どうするの？

Serre spectral sequence を調べる ← これは自明になっている。

対応する cocycle を up to coboundary で決定する。

その cocycle が $P^m_B \mathcal{L}M = P^m_B \Omega_B d(M)$ で coboundary かどうかを調べたら良い。

《TC の計算例は多くないので実際に計算するしかない》

— セルの個数が半端でない為、手計算はほぼ不可能 —

線形問題に落とし込んで python でプログラムを書く！

線形問題への落とし込み

命題. $H^*(BQ;\mathbb{F}_2) \cong A \otimes \mathbb{F}_2[w]$, $A \cong \mathbb{F}_2[x,y]/(x^3, y^3, x^2+y^2+xy)$

命題. M は向き付け可能で $H^3(M;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z\}$、$z$ は A の $x^2y = xy^2$ に対応する。

定理 (Fujii '73). $M = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2_1 \cup e^2_2 \cup e^3$、また z は e^3 の双対である。

命題. $H^6(M \times M;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z \otimes z\}$

命題. $e^*_\infty(z \otimes z) \in H^6(P^\infty_B \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2)$ is the class of $c \in Z^6(P^\infty_B \mathcal{L}M)$ given by

$$c[\tau|\{h_1|\cdots|h_k\}] = z(\tau)\cdot x^2y[h_1|\cdots|h_k]$$

定理 (Miyata-I). $e^*_5(z \otimes z) = [c]$（$c \in Z^6(P^5_B \mathcal{L}M)$ とみなした）

問 A. 線形写像 $\delta : C^5(P^5_B \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2) \to C^6(P^5_B \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c の表現ベクトルを T_c とすると、線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_c$ は解を持つか？ 持つなら解はどう書けるか？

（とにかく計算量が多すぎる）

問Aの簡易化

→【解の記述】

定義. $C^\infty(P_B^\infty \mathcal{L}M)$ のコサイクル c' を次で定める。

$$c'[\tau|\{h_1|\cdots|h_k\}] = z(\tau)\cdot x^2[h_1|\cdots|h_k]$$

命題. 線形写像 $\delta : C^4(P_B^5 \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2) \to C^5(P_B^5 \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とすると、線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_{c'}$ は解を持たない。（$e_5^*(z\otimes x^2)\neq 0$ に相当）

命題. 線形写像 $\delta : C^4(P_B^4 \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2) \to C^5(P_B^4 \mathcal{L}M;\mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とすると、線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_{c'}$ は解を持つ。（$e_4^*(z\otimes x^2) = 0$ に相当）

— $T_\delta \mathbb{x} = T_{c'}$ の解の存在を示し、問Aの解（5-chain）の存在が分かった —

注意. 計算機センターの南里豪志さんのアドバイスで Python プログラムを改良し、簡易化前の問Aに対する Python プログラムも M1 mac 上で正常終了し、期待どおりの結果を得た。

プログラムの流れ

- 射影空間の次数を定める。
- 群 Q の multiplication と inversion の table を記述する。
- Fujii によって完全に決定された $e^0, e^1_1, e^1_2, e^2_1, e^2_2, e^3$ の境界を記述する。
- 定義から完全に分かる bar construction の境界を記述する。
- δ の $\mathbb{F}_2$ 上の表現行列（$P^5_B\mathcal{L}M$ の場合で 38759×22344）を二次元配列として求める。
- 拡大係数行列 $[T_\delta|T_{c'}]$ の階数 R と T_δ の階数 r を求める。

— $R = r$ ならば解があり、$R = r{+}1$ ならば解が無い —

- 線形写像 $\delta : C^4(P^5_B\mathcal{L}M; \mathbb{F}_2) \to C^5(P^5_B\mathcal{L}M; \mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とすると、線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_{c'}$ は解を持たない。（$e^*_5(z \otimes x^2) \neq 0$ に相当）
- 線形写像 $\delta : C^4(P^4_B\mathcal{L}M; \mathbb{F}_2) \to C^5(P^4_B\mathcal{L}M; \mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とすると、線形方程式 $T_\delta \mathbb{x} = T_c$ は解を持つ。（$e^*_4(z \otimes x^2) = 0$ に相当）

解の記述 I

→【以上です】

Let us denote by $[0,1,2,3,4,5,6,7]=[e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b]$ and $[e0,e11,e12,e21,e22,e3]$ $=[e^0,e^1_1,e^1_2,e^2_1,e^2_2,e^3]$ to describe $[e^1_2|\{a|ab|a^3\}]$ as $[e12|1|5|3]$. Then one particular solution is

$[e0|7|7|7|6]+[e0|7|7|6|6]+[e0|7|7|6|2]+[e0|7|7|2|5]+[e0|7|7|2|1]+[e0|7|7|5|3]+[e0|7|7|5|6]+$
$[e0|7|7|5|5]+[e0|7|7|5|1]+[e0|7|7|1|3]+[e0|7|7|1|2]+[e0|7|3|6|5]+[e0|7|3|6|1]+[e0|7|3|5|3]+$
$[e0|7|3|1|5]+[e0|7|6|7|5]+[e0|7|6|7|1]+[e0|7|6|3|3]+[e0|7|6|3|2]+[e0|7|6|3|5]+[e0|7|6|3|1]+$
$[e0|7|6|6|2]+[e0|7|6|6|1]+[e0|7|6|2|7]+[e0|7|6|2|3]+[e0|7|6|2|6]+[e0|7|6|2|2]+[e0|7|6|2|1]+$
$[e0|7|6|2|4]+[e0|7|6|5|3]+[e0|7|6|5|4]+[e0|7|6|1|7]+[e0|7|6|1|3]+[e0|7|6|1|2]+[e0|7|6|1|4]+$
$[e0|7|2|7|6]+[e0|7|2|3|7]+[e0|7|2|3|2]+[e0|7|2|3|4]+[e0|7|2|6|6]+[e0|7|2|6|2]+[e0|7|2|2|6]+$
$[e0|7|2|2|2]+[e0|7|2|2|5]+[e0|7|2|2|4]+[e0|7|2|5|2]+[e0|7|2|5|5]+[e0|7|2|5|1]+[e0|7|2|1|7]+$
$[e0|7|2|1|3]+[e0|7|2|1|6]+[e0|7|2|1|4]+[e0|7|2|4|2]+[e0|7|5|7|6]+[e0|7|5|3|7]+[e0|7|5|3|2]+$
$[e0|7|5|3|4]+[e0|7|5|6|3]+[e0|7|5|6|6]+[e0|7|5|6|2]+[e0|7|5|6|5]+[e0|7|5|2|2]+[e0|7|5|2|4]+$
$[e0|7|5|5|3]+[e0|7|5|5|6]+[e0|7|5|5|2]+[e0|7|5|5|1]+[e0|7|5|1|3]+[e0|7|5|1|4]+[e0|7|5|4|2]+$
$[e0|7|1|7|3]+[e0|7|1|7|2]+[e0|7|1|7|5]+[e0|7|1|3|3]+[e0|7|1|3|5]+[e0|7|1|6|3]+[e0|7|1|2|3]+$
$[e0|7|1|2|6]+[e0|7|1|2|2]+[e0|7|1|2|4]+[e0|7|1|5|2]+[e0|7|1|5|5]+[e0|7|1|5|4]+[e0|7|1|1|3]+$

解の記述 II

$$[e0|7|1|1|4]+[e0|7|1|4|3]+[e0|7|1|4|2]+[e0|7|1|4|5]+[e0|7|4|7|1]+[e0|7|4|3|7]+[e0|7|4|3|6]+$$
$$[e0|7|4|6|7]+[e0|7|4|6|3]+[e0|7|4|6|6]+[e0|7|4|2|2]+[e0|7|4|2|4]+[e0|7|4|5|2]+[e0|7|4|5|4]+$$
$$[e0|7|4|1|2]+[e0|7|4|4|2]+[e0|3|7|7|3]+[e0|3|7|7|2]+[e0|3|7|7|5]+[e0|3|7|7|1]+[e0|3|7|3|7]+$$
$$[e0|3|7|3|3]+[e0|3|7|3|6]+[e0|3|7|3|5]+[e0|3|7|3|4]+[e0|3|7|6|5]+[e0|3|7|6|1]+[e0|3|7|2|3]+$$
$$[e0|3|7|2|5]+[e0|3|7|5|7]+[e0|3|7|5|2]+[e0|3|7|5|5]+[e0|3|7|1|6]+[e0|3|7|1|4]+[e0|3|7|4|5]+$$
$$[e0|3|7|4|1]+[e0|3|3|6|7]+[e0|3|3|2|1]+[e0|3|3|5|7]+[e0|3|3|5|3]+[e0|3|3|5|5]+[e0|3|3|1|6]+$$
$$[e0|3|3|1|1]+[e0|3|6|7|3]+[e0|3|6|7|6]+[e0|3|6|7|2]+[e0|3|6|7|5]+[e0|3|6|3|7]+[e0|3|6|3|3]+$$
$$[e0|3|6|3|6]+[e0|3|6|3|5]+[e0|3|6|3|4]+[e0|3|6|6|3]+[e0|3|6|6|6]+[e0|3|6|6|1]+[e0|3|6|6|4]+$$
$$[e0|3|6|2|7]+[e0|3|6|2|3]+[e0|3|6|2|5]+[e0|3|6|2|1]+[e0|3|6|5|3]+[e0|3|6|5|5]+[e0|3|6|5|1]+$$
$$[e0|3|6|1|7]+[e0|3|6|1|2]+[e0|3|6|1|5]+[e0|3|6|1|4]+[e0|3|6|4|7]+[e0|3|6|4|5]+[e0|3|2|7|1]+$$
$$[e0|3|2|3|7]+[e0|3|2|3|6]+[e0|3|2|6|6]+[e0|3|2|6|2]+[e0|3|2|6|5]+[e0|3|2|6|4]+[e0|3|2|2|2]+$$
$$[e0|3|2|2|5]+[e0|3|2|2|1]+[e0|3|2|2|4]+[e0|3|2|5|7]+[e0|3|2|5|3]+[e0|3|2|5|6]+[e0|3|2|5|2]+$$
$$[e0|3|2|5|5]+[e0|3|2|5|1]+[e0|3|2|1|2]+[e0|3|2|1|1]+[e0|3|2|4|2]+[e0|3|5|7|7]+[e0|3|5|7|6]+$$
$$[e0|3|5|7|1]+[e0|3|5|3|3]+[e0|3|5|3|6]+[e0|3|5|3|5]+[e0|3|5|3|4]+[e0|3|5|6|6]+[e0|3|5|6|5]+$$

解の記述 III

$$
\begin{aligned}
&[e0|3|5|6|1]+[e0|3|5|2|7]+[e0|3|5|2|2]+[e0|3|5|2|5]+[e0|3|5|2|4]+[e0|3|5|5|5]+[e0|3|5|5|4]+\\
&[e0|3|5|1|5]+[e0|3|5|4|2]+[e0|3|5|4|5]+[e0|3|5|4|1]+[e0|3|1|7|1]+[e0|3|1|3|7]+[e0|3|1|3|6]+\\
&[e0|3|1|3|5]+[e0|3|1|6|3]+[e0|3|1|6|6]+[e0|3|1|6|5]+[e0|3|1|2|6]+[e0|3|1|2|2]+[e0|3|1|2|4]+\\
&[e0|3|1|5|7]+[e0|3|1|5|6]+[e0|3|1|5|4]+[e0|3|1|1|2]+[e0|3|1|4|2]+[e0|3|4|6|5]+[e0|3|4|6|1]+\\
&[e0|3|4|5|3]+[e0|3|4|1|5]+[e0|6|7|7|3]+[e0|6|7|3|3]+[e0|6|7|3|6]+[e0|6|7|3|2]+[e0|6|7|5|3]+\\
&[e0|6|7|5|2]+[e0|6|7|5|4]+[e0|6|7|1|5]+[e0|6|7|4|3]+[e0|6|7|4|5]+[e0|6|3|7|2]+[e0|6|3|7|5]+\\
&[e0|6|3|7|1]+[e0|6|3|3|2]+[e0|6|3|3|5]+[e0|6|3|3|1]+[e0|6|3|6|3]+[e0|6|3|6|5]+[e0|6|3|6|1]+\\
&[e0|6|3|6|4]+[e0|6|3|2|3]+[e0|6|3|2|2]+[e0|6|3|2|1]+[e0|6|3|5|7]+[e0|6|3|5|6]+[e0|6|3|5|2]+\\
&[e0|6|3|1|2]+[e0|6|3|1|5]+[e0|6|3|1|4]+[e0|6|3|4|7]+[e0|6|3|4|3]+[e0|6|3|4|2]+[e0|6|3|4|1]+\\
&[e0|6|3|4|4]+[e0|6|6|7|5]+[e0|6|6|3|7]+[e0|6|6|3|4]+[e0|6|6|2|5]+[e0|6|6|2|4]+[e0|6|6|5|3]+\\
&[e0|6|6|5|6]+[e0|6|6|5|1]+[e0|6|6|1|3]+[e0|6|6|4|1]+[e0|6|6|4|4]+[e0|6|2|7|7]+[e0|6|2|7|2]+\\
&[e0|6|2|6|7]+[e0|6|2|6|1]+[e0|6|2|2|7]+[e0|6|2|2|2]+[e0|6|2|2|4]+[e0|6|2|5|7]+[e0|6|2|5|6]+\\
&[e0|6|2|5|2]+[e0|6|2|1|7]+[e0|6|2|1|3]+[e0|6|2|1|6]+[e0|6|2|1|2]+[e0|6|2|1|5]+[e0|6|2|1|1]+\\
&[e0|6|2|4|7]+[e0|6|2|4|2]+[e0|6|2|4|1]+[e0|6|2|4|4]+[e0|6|5|7|3]+[e0|6|5|7|2]+[e0|6|5|7|5]+
\end{aligned}
$$

解の記述 IV

$\mathrm{[e0|6|5|7|1]} + \mathrm{[e0|6|5|3|3]} + \mathrm{[e0|6|5|3|6]} + \mathrm{[e0|6|5|3|2]} + \mathrm{[e0|6|5|3|5]} + \mathrm{[e0|6|5|3|1]} + \mathrm{[e0|6|5|6|7]} +$
$[e0|6|5|6|6]+[e0|6|5|6|5]+[e0|6|5|6|4]+[e0|6|5|2|6]+[e0|6|5|2|2]+[e0|6|5|2|5]+[e0|6|5|5|7]+$
$[e0|6|5|5|3]+[e0|6|5|5|6]+[e0|6|5|5|2]+[e0|6|5|5|5]+[e0|6|5|5|4]+[e0|6|5|1|2]+[e0|6|5|1|1]+$
$[e0|6|5|1|4]+[e0|6|5|4|6]+[e0|6|5|4|2]+[e0|6|5|4|5]+[e0|6|1|7|3]+[e0|6|1|7|2]+[e0|6|1|3|6]+$
$[e0|6|1|3|5]+[e0|6|1|6|3]+[e0|6|1|6|6]+[e0|6|1|6|2]+[e0|6|1|6|1]+[e0|6|1|2|7]+[e0|6|1|2|2]+$
$[e0|6|1|2|5]+[e0|6|1|2|1]+[e0|6|1|5|7]+[e0|6|1|5|2]+[e0|6|1|5|5]+[e0|6|1|5|4]+[e0|6|1|4|6]+$
$[e0|6|1|4|5]+[e0|6|4|7|7]+[e0|6|4|7|2]+[e0|6|4|7|5]+[e0|6|4|3|3]+[e0|6|4|3|2]+[e0|6|4|6|7]+$
$[e0|6|4|6|3]+[e0|6|4|6|1]+[e0|6|4|2|7]+[e0|6|4|2|3]+[e0|6|4|2|2]+[e0|6|4|5|6]+[e0|6|4|5|1]+$
$[e0|6|4|1|7]+[e0|6|4|1|6]+[e0|6|4|1|2]+[e0|6|4|1|5]+[e0|6|4|1|1]+[e0|6|4|4|7]+[e0|6|4|4|2]+$
$[e0|6|4|4|5]+[e0|2|7|7|5]+[e0|2|7|3|7]+[e0|2|7|3|2]+[e0|2|7|3|4]+[e0|2|7|6|7]+[e0|2|7|6|6]+$
$[e0|2|7|6|2]+[e0|2|7|6|4]+[e0|2|7|2|3]+[e0|2|7|2|6]+[e0|2|7|2|2]+[e0|2|7|2|5]+[e0|2|7|2|4]+$
$[e0|2|7|5|3]+[e0|2|7|5|6]+[e0|2|7|5|2]+[e0|2|7|5|1]+[e0|2|7|1|5]+[e0|2|7|1|4]+[e0|2|7|4|2]+$
$[e0|2|7|4|5]+[e0|2|7|4|1]+[e0|2|3|7|7]+[e0|2|3|7|3]+[e0|2|3|7|1]+[e0|2|3|3|7]+[e0|2|3|3|6]+$
$[e0|2|3|3|1]+[e0|2|3|6|3]+[e0|2|3|6|6]+[e0|2|3|6|2]+[e0|2|3|6|4]+[e0|2|3|2|6]+[e0|2|3|2|2]+$

解の記述 V

$$[e0|2|3|2|5]+[e0|2|3|2|1]+[e0|2|3|2|4]+[e0|2|3|5|3]+[e0|2|3|5|6]+[e0|2|3|5|2]+[e0|2|3|5|1]+$$

$$[e0|2|3|1|6]+[e0|2|3|1|2]+[e0|2|3|4|2]+[e0|2|6|7|7]+[e0|2|6|7|3]+[e0|2|6|7|2]+[e0|2|6|7|5]+$$

$$[e0|2|6|3|7]+[e0|2|6|3|5]+[e0|2|6|3|4]+[e0|2|6|6|7]+[e0|2|6|6|5]+[e0|2|6|6|1]+[e0|2|6|6|4]+$$

$$[e0|2|6|2|7]+[e0|2|6|2|2]+[e0|2|6|2|5]+[e0|2|6|2|1]+[e0|2|6|2|4]+[e0|2|6|5|3]+[e0|2|6|5|2]+$$

$$[e0|2|6|5|1]+[e0|2|6|5|4]+[e0|2|6|1|7]+[e0|2|6|1|3]+[e0|2|6|1|2]+[e0|2|6|1|5]+[e0|2|6|4|7]+$$

$$[e0|2|6|4|2]+[e0|2|2|7|3]+[e0|2|2|7|6]+[e0|2|2|7|2]+[e0|2|2|7|5]+[e0|2|2|7|1]+[e0|2|2|7|4]+$$

$$[e0|2|2|3|6]+[e0|2|2|3|2]+[e0|2|2|3|5]+[e0|2|2|3|1]+[e0|2|2|6|3]+[e0|2|2|6|2]+[e0|2|2|6|4]+$$

$$[e0|2|2|2|7]+[e0|2|2|2|3]+[e0|2|2|2|6]+[e0|2|2|5|3]+[e0|2|2|5|6]+[e0|2|2|4|7]+[e0|2|5|7|3]+$$

$$[e0|2|5|7|6]+[e0|2|5|3|5]+[e0|2|5|3|1]+[e0|2|5|3|4]+[e0|2|5|6|7]+[e0|2|5|6|3]+[e0|2|5|6|2]+$$

$$[e0|2|5|6|1]+[e0|2|5|6|4]+[e0|2|5|2|6]+[e0|2|5|5|6]+[e0|2|1|7|3]+[e0|2|1|7|6]+[e0|2|1|7|4]+$$

$$[e0|2|1|3|7]+[e0|2|1|3|6]+[e0|2|1|6|3]+[e0|2|1|6|2]+[e0|2|1|6|5]+[e0|2|1|6|1]+[e0|2|1|6|4]+$$

$$[e0|2|1|2|6]+[e0|2|1|1|7]+[e0|2|4|7|3]+[e0|2|4|7|2]+[e0|2|4|7|5]+[e0|2|4|7|1]+[e0|2|4|3|7]+$$

$$[e0|2|4|3|6]+[e0|2|4|3|4]+[e0|2|4|2|7]+[e0|5|7|7|3]+[e0|5|7|7|6]+[e0|5|7|3|7]+[e0|5|7|3|1]+$$

$$[e0|5|7|3|4]+[e0|5|7|6|3]+[e0|5|7|6|2]+[e0|5|7|6|5]+[e0|5|7|5|3]+[e0|5|3|7|2]+[e0|5|3|7|5]+$$

解の記述 VI

$$[e0|5|3|7|1]+[e0|5|3|3|7]+[e0|5|3|3|6]+[e0|5|3|3|2]+[e0|5|3|3|1]+[e0|5|3|6|6]+[e0|5|3|6|5]+$$
$$[e0|5|3|2|7]+[e0|5|3|2|6]+[e0|5|3|1|4]+[e0|5|3|4|3]+[e0|5|3|4|1]+[e0|5|6|7|7]+[e0|5|6|7|2]+$$
$$[e0|5|6|7|5]+[e0|5|6|7|1]+[e0|5|6|7|4]+[e0|5|6|3|6]+[e0|5|6|3|2]+[e0|5|6|3|5]+[e0|5|6|3|1]+$$
$$[e0|5|6|6|7]+[e0|5|6|6|2]+[e0|5|6|2|7]+[e0|5|6|2|3]+[e0|5|6|2|6]+[e0|5|6|2|2]+[e0|5|6|2|5]+$$
$$[e0|5|6|2|4]+[e0|5|6|5|2]+[e0|5|6|5|1]+[e0|5|6|1|3]+[e0|5|6|1|6]+[e0|5|6|1|2]+[e0|5|6|1|5]+$$
$$[e0|5|6|1|4]+[e0|5|6|4|7]+[e0|5|6|4|3]+[e0|5|2|7|3]+[e0|5|2|3|3]+[e0|5|2|3|6]+[e0|5|2|3|5]+$$
$$[e0|5|2|3|1]+[e0|5|2|3|4]+[e0|5|2|6|7]+[e0|5|2|6|3]+[e0|5|2|6|2]+[e0|5|2|2|3]+[e0|5|2|2|6]+$$
$$[e0|5|2|5|3]+[e0|5|5|7|3]+[e0|5|5|7|6]+[e0|5|5|3|7]+[e0|5|5|3|3]+[e0|5|5|3|2]+[e0|5|5|3|1]+$$
$$[e0|5|5|6|6]+[e0|5|5|6|2]+[e0|5|5|6|5]+[e0|5|5|6|1]+[e0|5|5|5|6]+[e0|1|7|7|7]+[e0|1|7|7|2]+$$
$$[e0|1|7|7|4]+[e0|1|7|3|7]+[e0|1|7|6|7]+[e0|1|7|6|3]+[e0|1|7|6|5]+[e0|1|7|6|1]+[e0|1|7|2|7]+$$
$$[e0|1|7|2|5]+[e0|1|7|5|5]+[e0|1|7|1|7]+[e0|1|7|1|6]+[e0|1|7|1|2]+[e0|1|7|1|5]+[e0|1|7|1|1]+$$
$$[e0|1|7|4|7]+[e0|1|7|4|3]+[e0|1|3|7|6]+[e0|1|3|7|2]+[e0|1|3|7|5]+[e0|1|3|7|1]+[e0|1|3|3|7]+$$
$$[e0|1|3|6|3]+[e0|1|3|6|5]+[e0|1|3|2|6]+[e0|1|3|1|7]+[e0|1|6|7|3]+[e0|1|6|7|5]+[e0|1|6|3|6]+$$
$$[e0|1|6|3|2]+[e0|1|6|3|5]+[e0|1|6|6|3]+[e0|1|6|6|5]+[e0|1|6|6|4]+[e0|1|6|2|3]+[e0|1|6|2|2]+$$

解の記述 VII

$$
\begin{aligned}
&[e0|1|6|2|5]+[e0|1|6|2|4]+[e0|1|6|1|2]+[e0|1|6|1|5]+[e0|1|6|1|4]+[e0|1|6|4|3]+[e0|1|6|4|2]+\\
&[e0|1|6|4|5]+[e0|1|2|7|3]+[e0|1|2|7|6]+[e0|1|2|7|5]+[e0|1|2|7|1]+[e0|1|2|7|4]+[e0|1|2|6|3]+\\
&[e0|1|2|6|2]+[e0|1|2|6|4]+[e0|1|1|7|5]+[e0|1|1|3|7]+[e0|1|1|3|6]+[e0|1|1|6|1]+[e0|1|1|2|7]+\\
&[e0|4|7|2|3]+[e0|4|7|1|5]+[e0|4|7|1|1]+[e0|4|7|4|5]+[e0|4|3|7|6]+[e0|4|3|7|5]+[e0|4|3|3|7]+\\
&[e0|4|3|3|2]+[e0|4|3|3|4]+[e0|4|3|6|7]+[e0|4|3|6|6]+[e0|4|3|6|5]+[e0|4|3|6|1]+[e0|4|3|2|2]+\\
&[e0|4|3|2|5]+[e0|4|3|2|4]+[e0|4|3|5|3]+[e0|4|3|5|2]+[e0|4|3|1|5]+[e0|4|3|4|2]+[e0|4|6|7|3]+\\
&[e0|4|6|7|1]+[e0|4|6|7|4]+[e0|4|6|3|7]+[e0|4|6|3|3]+[e0|4|6|3|2]+[e0|4|6|3|5]+[e0|4|6|3|4]+\\
&[e0|4|6|6|7]+[e0|4|6|2|7]+[e0|4|6|4|3]+[e0|4|2|7|2]+[e0|4|2|7|5]+[e0|4|2|7|1]+[e0|4|2|3|7]+\\
&[e0|4|2|3|3]+[e0|4|2|3|6]+[e0|4|2|3|4]+[e0|4|2|6|7]+[e0|4|2|6|3]+[e0|4|2|2|3]+[e0|4|4|3|3]+\\
&[e0|4|4|6|7]+[e0|4|4|6|3]+[e12|7|7|2]+[e11|7|7|5]+[e12|7|7|1]+[e12|7|3|7]+[e11|7|3|3]+\\
&[e11|7|3|4]+[e11|7|6|7]+[e12|7|6|7]+[e12|7|6|3]+[e12|7|6|6]+[e11|7|6|2]+[e12|7|6|5]+\\
&[e12|7|6|1]+[e11|7|6|4]+[e11|7|2|3]+[e11|7|2|6]+[e11|7|2|2]+[e12|7|2|2]+[e11|7|2|5]+\\
&[e11|7|2|1]+[e12|7|2|4]+[e11|7|5|3]+[e12|7|5|3]+[e12|7|5|6]+[e11|7|5|2]+[e11|7|1|7]+\\
&[e12|7|1|2]+[e12|7|1|5]+[e12|7|1|4]+[e11|7|4|3]+[e11|7|4|2]+[e12|7|4|2]+[e11|7|4|1]+
\end{aligned}
$$

解の記述 VIII

$$[e11|7|4|4] + [e11|3|7|7] + [e11|3|7|3] + [e11|3|7|6] + [e11|3|7|2] + [e12|3|7|2] + [e12|3|7|1] +$$
$$[e11|3|7|4] + [e12|3|7|4] + [e11|3|3|7] + [e12|3|3|7] + [e11|3|3|2] + [e12|3|3|2] + [e11|3|3|1] +$$
$$[e12|3|6|7] + [e12|3|6|3] + [e12|3|6|6] + [e12|3|6|5] + [e12|3|6|1] + [e11|3|2|7] + [e11|3|2|6] +$$
$$[e12|3|2|2] + [e11|3|2|5] + [e11|3|2|1] + [e11|3|2|4] + [e12|3|2|4] + [e11|3|5|7] + [e12|3|5|3] +$$
$$[e11|3|5|1] + [e11|3|1|7] + [e11|3|1|6] + [e12|3|1|6] + [e11|3|1|2] + [e11|3|1|5] + [e12|3|1|5] +$$
$$[e11|3|4|7] + [e11|3|4|3] + [e11|3|4|6] + [e11|3|4|2] + [e12|3|4|2] + [e11|3|4|1] + [e12|6|7|7] +$$
$$[e11|6|7|3] + [e12|6|7|2] + [e12|6|7|5] + [e11|6|3|7] + [e12|6|3|6] + [e11|6|3|5] + [e11|6|3|4] +$$
$$[e12|6|3|4] + [e12|6|6|7] + [e12|6|6|3] + [e11|6|6|2] + [e11|6|6|5] + [e11|6|2|7] + [e12|6|2|7] +$$
$$[e11|6|2|3] + [e11|6|2|2] + [e11|6|2|5] + [e12|6|2|1] + [e11|6|5|7] + [e12|6|5|7] + [e12|6|5|3] +$$
$$[e11|6|5|2] + [e12|6|5|2] + [e11|6|5|5] + [e12|6|5|1] + [e11|6|1|7] + [e12|6|1|7] + [e12|6|1|6] +$$
$$[e11|6|1|2] + [e11|6|1|5] + [e12|6|1|5] + [e11|6|1|1] + [e12|6|1|1] + [e11|6|1|4] + [e12|6|1|4] +$$
$$[e12|6|4|7] + [e12|6|4|3] + [e11|6|4|5] + [e11|6|4|1] + [e12|2|7|7] + [e11|2|7|3] + [e11|2|7|1] +$$
$$[e12|2|7|1] + [e11|2|7|4] + [e12|2|3|7] + [e11|2|3|3] + [e12|2|3|3] + [e11|2|3|6] + [e11|2|3|5] +$$
$$[e11|2|6|7] + [e11|2|6|3] + [e11|2|6|6] + [e12|2|6|5] + [e11|2|6|1] + [e12|2|6|1] + [e11|2|2|7] +$$

$$[e12|2|2|7]+[e12|2|2|3]+[e11|2|2|6]+[e11|2|5|7]+[e11|2|1|3]+[e11|5|7|7]+[e11|5|7|3]+$$
$$[e11|5|3|7]+[e11|5|3|2]+[e11|5|3|4]+[e11|5|6|7]+[e11|5|6|3]+[e11|5|6|2]+[e11|5|2|7]+$$
$$[e11|5|2|3]+[e11|5|2|6]+[e11|5|5|3]+[e11|1|7|7]+[e11|1|7|6]+[e11|1|7|2]+[e11|1|3|7]+$$
$$[e11|1|3|3]+[e11|1|6|2]+[e11|1|2|7]+[e11|1|2|3]+[e11|1|2|6]+[e11|1|1|7]+[e12|4|7|1]+$$
$$[e12|4|3|7]+[e12|4|6|7]+[e12|4|6|3]+[e21|7|7]+[e21|7|6]+[e21|7|2]+[e21|7|1]+[e22|7|1]+$$
$$[e22|7|4]+[e22|3|3]+[e21|3|6]+[e22|3|2]+[e21|3|5]+[e22|3|5]+[e22|3|4]+[e22|6|7]+$$
$$[e21|6|3]+[e22|6|3]+[e21|6|5]+[e21|2|7]+[e22|2|3]+[e21|2|2]+[e22|2|2]+[e3|7]+[e3|3]$$

以上です