HODGE THEORY, LOCAL SYSTEMS AND DIFFERENTIAL GRADED ALGEBRAS

糟谷久矢 (大阪大学)

Abstract. 今回の主な目的は:
(1) コンパクトケーラー多様体のコホモロジーの Hodge 分解からスタートして Hodge 理論が発展していく流れを概観する.
(2) Variation of mixed Hodge structure や non-abelian Hodge theory といった Hodge 理論の高度化した概念の結びつきを知る.

Hodge theory 概説

M をコンパクトケーラー多様体とする. よく知られているように以下の Hodge 分解が成立する

$$H^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

ここで, 左辺は複素係数 de Rham コホモロジー (位相不変量) であり、右辺の各 $H^{p,q}(M)$ は複素多様体の Dolbeault コホモロジー（複素解析的不変量) である. 今回, Hodge 理論とはこの分解を " 詳しく " 理解し拡張させていくことを目指すもののことであるとしておく. Hodge 理論において重要なものを以下に挙げる.

(0) Hodge structure
(1) Mixed Hodge structure
(2) Variation of Hodge structure
(3) Non-abelian Hodge theory

それぞれを見ていこう. ただし, 今回の話はコンパクトで非特異な多様体で起こることを中心に論じていくこと, また, 対称性 (実係数) や有理係数や整係数に関する部分には立ち入らないことは注意しておく. 詳細については参照している文献や [17], [2] などを見られたい.

(0) Hodge structure. $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V の上の重さ k の $\mathbb{C}$-Hodge structure は二重次数付け

$$V = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

として定義される. これは, " 向かい合う二つのフィルトレーション" としても特徴づけることができる ([4]). コンパクトケーラー多様体の Hodge 分解

$$H^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

にこの見方を取り入れることで, $\partial\bar{\partial}$-Lemma(が成り立つ) という複素幾何学的な微分方程式が解けることにつながる. $\partial\bar{\partial}$-Lemma はコンパクトケーラー多様体の Formality(Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan[7]) や Calabi-Yau 多様体の変形の非障害性 (Tian-Todorov[23, 24]) を導く重要な性質である.

(1) Mixed Hodge structure. $\mathbb{C}$-ベクトル空間Vの$\mathbb{C}$-Mixed Hodge structureはフィルとレーションの三つ組(W_*, F^*, G^*)で$Gr_W^k(V)$毎に(F^*, G^*)が重さkの$\mathbb{C}$-Hodge structureを定めるものとして、Deligneにより定義された[4]. これはVのある種の二重次数付としても特徴づけることができる. Mixed Hodge structureは複素準射影多様体([4])や後述のVariation of Hodge structureの退化として現れる([19])といった、非コンパクト多様体や特異性との関連で重要な対象であるが, コンパクトケーラー多様体を考える上でも非自明なMixed Hodge structureは現れる. Morgan-HainのMixed Hodge structureである. コンパクトケーラー多様体Mの基本群$\pi_1(M,x)$とその降中心列$\pi_1(M,x) = \pi^{(1)} \supset \pi^{(2)} \supset \pi^{(3)} \supset \dots$を考える. 前述の$\partial\bar{\partial}$-LemmaまたはFormalityとde Rhamホモトピー理論により, 各アーベル群商の複素化$\pi^{(k)}/\pi^{(k+1)} \otimes \mathbb{C}$には重さ$k$のHodge structureが自然に定まることがわかる. よって, 基本群の複素化(Malcev完備化)にMixed Hodge structureが入ることが示唆される. Morgan[16]はSullivanの極小モデル([22])の方法によりMの複素構造にうまく適合する多様なMixed Hodge structureを構成した. またHain[12]は, Chenの反復積分([3])の方法によりMの各点xに対しcanonicalに定まるfunctorialなMixed Hodge structureを構成した. Sullivanの極小モデルの方法とChenの反復積分の方法はde Rhamホモトピー理論あるいは有理ホモトピー理論の手法であり, それぞれ結果計算しているもの($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$-ホモトピー)は同じであるが不定積分と定積分のように異なる手法である. (基本群の場合の)Morganの構成とHainの構成は"ほぼ同じ"ものを構成しているが, その詳細な関連はあまり調べられてこなかったが, 拙著[15]である種の(non-abelian mixed Hodge structureとしての)同値性が示された. その鍵は後述のVariation of Hodge structureである.

(2)Variation of Hodge structure. コンパクトケーラー多様体の複素解析的な族(位相形は変えず複素構造を連続的かつ複素解析的に変化させたもの)$\{M_t\}$を考える. すると, Hodge分解

$$H^k(M_t, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M_t)$$

が得られる. tによってベクトル空間$H^k(M_t, \mathbb{C})$自体は変化しないので, 一つのベクトル空間の上のtにより変動するHodge structureが得られたことになる. Griffiths[9]によって, この変動について特徴的な構造(Griffiths Transversality)が見出された. 以後, コンパクトケーラー多様体の複素解析的な族からきたものかどうかに関わらず, Griffiths Transversalityを満たす一つのベクトル空間の上Hodge structureの変動のことをVariation of Hodge structureと呼ぶ. より詳しくは, 複素多様体上の複素local system(平坦ベクトル束)Eで各点のファイバーにHodge structure(F, G)が定まりそれらが部分束をなし, "Griffiths Transversalityを満たす$dF^r \subset A^1(F^{r-1})$, $dG^r \subset A^1(G^{r-1})$, "ようなものを複素多様体上のVariation of Hodge structureと定義する. コンパクトケーラー多様体の複素解析的な族のパラメーターとしてコンパクト複素多様体が現れることは稀であるが, コンパクト複素多様体上のVariation of Hodge structureを考えることには大きな意味がある. コンパクトケーラー多様体M上のVariation of Hodge structure Eを考えると, local system Eに値を持つコホモロジー$H^k(M, E)$には通常のコホモロジー$H^k(M, \mathbb{C})$同様canonicalなHodge structureが定まる([26]). コンパクトケーラー複素多様体上のVariation of Hodge structure$E$の平行移動により定まるMonodromy表現は半単純であることが知られている.

全く同様にしてGriffiths TransversalityによりVariation of mixed Hodge structure(E, W_*, F^*, G^*)が定義される[6]. Hain-Zuckerは前述のHainの基本群のmixed Hodge structureに対し, mixed Hodge表現とUnipotent Variation of mixed Hodge structureが対応することを示した([13]). ここで, Variation of mixed Hodge structure(E, W_*, F^*, G^*)がUnipotentであるとは, 各$Gr_W^k(E)$上ではHodge構造が変動していない(Constant)であるということである. 通常のVariation of Hodge structureとは対照的にUnipotent Variation of mixed Hodge structureは平行移動により冪零表現を与える. MorganのMixed Hodge structureに対しても同様な対応が構成できる[15]. Hain-Zuckerの対応と合わせることで, MorganのMixed Hodge structureとHainのMixed Hodge structureの具体的な関係が構築できる.

(3) Non-abelian Hodge theory. Non-abelain Hodge theory の基礎を成す結果は, Simpson によるコンパクトケーラー多様体 M 上での平坦ベクトル束と Higgs 束の対応 (Non-abelain Hodge 対応) である ([20, 21]). ここで Higgs 束とは正則ベクトル束 E と $\mathrm{End}(E)$ に値を取る正則 1 次形式 θ で $\theta\wedge\theta=0$ を満たすものの組 (E,θ) である. 平坦ベクトル束は平行移動による Monodromy 表現を考えることで基本群の線形表現に対応する. 非可換な基本群の表現に複素幾何学的対象である Higgs 束を対応させているので, 基本群の可換化である $H^1(M,\mathbb{C})$ に複素幾何学的なコホモロジーを対応させる一次の Hodge 分解

$$H^1(M,\mathbb{C})=H^{1,0}(M)\oplus H^{0,1}(M)$$

の非可換版なのである. Higgs 束 (E,θ) を考えると, Non-abelian Hodge 対応より線形表現 $\rho:\pi_1(M,x)\to GL(E_x)$ が定まる. 各 $t\in\mathbb{C}^*$ に対し, $(E,t\theta)$ はまた Higgs 束であるので, t 毎に線形表現 $\rho_t:\pi_1(M,x)\to GL(E_x)$ が得られる. 半単純な線型表現 $\rho:\pi_1(M,x)\to GL(E_x)$ が Variation of Hodge structure の平行移動から来る線形表現であることの必要十分条件は " 1 の冪根ではないある ($\Leftrightarrow$ 全ての) $t\in\mathbb{C}^*$ に対し, ρ と ρ_t は同値な表現である" ことである. このことは, Variation of Hodge structure は基本群 $\pi_1(M,x)$ の (Pure) Hodge 表現であるという形で述べることができる.

1. Main result

ここまでで, コンンパクトケーラー多様体上で Morgan-Hain の mixed Hodge structure(一次の Hodge 分解 $H^1(M,\mathbb{C})=H^{1,0}(M)\oplus H^{0,1}(M)$ の de Rham ホモトピー的拡張) が Unipotent Variation of mixed Hodge structure の " 表現 " を与え, non-abelian Hodge theory (一次の Hodge 分解 $H^1(M,\mathbb{C})=H^{1,0}(M)\oplus H^{0,1}(M)$ の非可換版) により Variation of Hodge structure(半単純) の " 表現 " を与えることを説明して来た. Hodge structure やベクトル束といったベクトル空間の上にモノが乗っている対象は全て " 行列表現" であるとする考え方がある (Tannaka 圏 [8]). 行列は, 半単純なものと Unipotent なものの積であるという jordan 分解を適用すると次の仮説が立てられる.

仮説 1. *Variation of mixed Hodge structure* は *non-abelian Hodge theory* と *de Rham* ホモトピー的手法により " 表現 " される.

ここで, de Rham ホモトピー的手法とは空間のホモトピー形に関する分類というよりは, Differential graded な対象を空間のモデルと見て, 潜在的な構造を求める手法という意味合いが強い.

今回はこの仮説を Sullivan の極小モデルを用いて解明する. 先行研究で, 他の手法を用いたものが存在するが (反復積分 [12], 変形理論 [18])、この手法ならではの利点を述べる. 一次の Hodge 分解

$$H^1(M,\mathbb{C})=H^{1,0}(M)\oplus H^{0,1}(M)$$

を考えた時, 右辺はそれぞれ正則一次形式および反正則一次形式の空間である. つまり一次の Hodge 分解は " 商をとる（積分する) 前" の微分形式のレベルで見ることができる. この見方は, Canonical な Sullivan1-極小モデルとして拡張できる. Variation of mixed Hodge structure についても " 商をとる（定積分する)" ことなしに " 表現 " することができる. 特に, 各 Variation of mixed Hodge structure の平坦接続について explicit な接続形式の表示を与えることができる.

2. Non-abelian mixed Hodge structure

Hodge theory の non-abelian 化についての一つの枠組みを見てみよう. (主に [1] で整理されている.)

考え方を知るために単純な例をまず見てみよう. 乗法群 $\mathbb{C}^*$ に対して, 一次線型表現 $\mathbb{C}^*\ni a\mapsto (a)\in GL_1(\mathbb{C})$ を考える. この表現は Affine 群 $\mathbb{C}^*\ltimes\mathbb{C}$ の表現への非可換な拡大 $\mathbb{C}^*\ltimes\mathbb{C}\ni(a,b)\mapsto \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$ を持つ. 一方, $\mathbb{C}^*\ltimes\mathbb{C}\ni(a,b)\mapsto(a)\in GL_1(\mathbb{C})$ によりは可換 (自明な) な拡大が得られる.

前述の Tannaka 圏の考え方から, (mixed) Hodge structure やベクトル束は行列表現と考えられる. 実際 Hodge structure は乗法群 $\mathbb{C}^*$（重さ込みなら $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$) を代数トーラスと考えて代数的表現と思うことができる. また平坦ベクトル束は平行移動により基本群の表現に対応する. k ごとに重さ k

の Hodge structure が与えられているとすると, それらをただ直和して並べただけの Mixed Hodge structure が得られる. Hodge structure を表現として見た時, このような Mixed Hodge structure は表現として見ると可換 (自明な) な拡大とみなせる. 一方で, 各 $Gr_k^W(V)$ として, 与えられた Hodge structure が現れる mixed Hodge structure で並べただけのものとは異なるものも得られる. このような Mixed Hodge structure は表現として見ると (ある半直積群の) 非可換な表現の拡大とみなせる. こうして見ると, Mixed Hodge structure は Hodge structure の non-abelian 化と見ることができる. (具体的な群 (Tannaka 双対) は [5] または [25] を参照)

コンパクトケーラー複素多様体 M を考える. Hodge structure が与えられているとすると, M 上の各点で与えられた Hodge structure を取る変動しない (constant な)Variation of Hodge structure が得られる. Hodge structure を表現として見た時, このような Variation of Hodge structure は表現として見ると可換な拡大とみなせる. 一方で, 一点 $x \in M$ では与えられた Hodge structure が現れるが変動している Variation of Hodge structure は表現として見ると (ある半直積群の) 非可換な表現の拡大とみなせる. こうして見ると, Variation of Hodge structure は Hodge structure の点 $x \in M$ に依存する non-abelian 化と見ることができる. (半直積の構造は Higgs 束による "$\mathbb{C}^*$-作用"$(E,\theta) \mapsto (E, t\theta)$ に対応している [21, Section 6])

同様にして, M 上の Variation of mixed Hodge structure は mixed Hodge structure の点 $x \in M$ に依存する non-abelian 化と見ることができる. (Hodge structure の二方向からの non-abelian 化ともいえよう) このような枠組みから考えると, 前述の主結果は以下のように statement を与えることになる.

定理 1. コンパクトケーラー複素多様体 M とその各点 x について, *Variation of mixed Hodge structure* からなる *non-abelian mixed Hodge structure* の *canonical* な表示 *(representative)* を得た.

References

[1] D. Arapura,The Hodge theoretic fundamental group and its cohomology. The geometry of algebraic cycles, 3–22, Clay Math. Proc., **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[2] J. L. Brylinski, S. Zucker, An Overview of Recent Advances in Hodge theory, in Several Complex Variables VI, Encyclopedia of Mathematical Science, **69**, Springer-Verlag, 1990, 39–142.

[3] K. T. Chen, Iterated path integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 5, 831–879.

[4] P. Deligne, Théorie de Hodge. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.

[5] P. Deligne, Structures de Hodge mixtes réelles. Motives (Seattle, WA, 1991), 509–514, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[6] P. Deligne, La conjecture de Weil. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **52** (1980), 137–252.

[7] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, Real homotopy theory of Kahler manifolds. Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.

[8] P. Deligne, J. S. Milne, Tannakian Categories, Lecture Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, pp. 101–228.

[9] P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **38** (1970), 125–180.

[10] P. Griffiths, W. Schmid, Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results. Discrete subgroups of Lie groups and applicatons to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973), pp. 31–127. Oxford Univ. Press, Bombay, 1975.

[11] R. M. Hain, The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I. K-Theory **1** (1987), no. 3, 271–324.

[12] R. M. Hain, The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 1, 47–92.

[13] R. M. Hain, S. Zucker, Unipotent variations of mixed Hodge structure. Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 83–124.

[14] H. Kasuya, Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures. Geom. Funct. Anal. **28** (2018), no. 2, 393–442.

[15] H. Kasuya, Morgan's mixed Hodge structures and nonabelian Hodge structures. Comm. Algebra **49** (2021), no. 6, 2655–2678.

[16] J. W. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **48** (1978), 137–204.

[17] C. A. M. Peters and J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structures, Ergebnisse der Mathe- matik und ihrer Grenzgebiete, 3. Fogle, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. **52**, Springer, 2008.

[18] J. P. Pridham, Real non-abelian mixed Hodge structures for quasi-projective varieties: formality and splitting. Mem. Amer. Math. Soc. **243** (2016), no. 1150.
[19] W. Schmid, Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping. Invent. Math. **22** (1973), 211–319.
[20] C. T. Simpson, Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 4, 867–918.
[21] C. T. Simpson, Higgs bundles and local systems. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **75** (1992), 5–95.
[22] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 269–331 (1978).
[23] G. Tian, Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric, Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), World Sci. Publishing, Singapore, 1987, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 1, pp. 629–646
[24] A Todorov, The Weil-Petersson geometry of the moduli space of SU($n \geq 3$) (Calabi-Yau) manifolds, I, Comm. Math. Phys., 1989, vol. **126**, pp. 325–346.
[25] A. Veilahti, Tannakian Formalism Applied to the Category of Mixed Hodge Structures Thesis University of Helsinki 2008.
[26] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients. L^2 cohomology in the Poincaré metric. Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 3, 415–476.

(Hisashi Kasuya) Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Osaka, Japan.

E-mail address: `kasuya@math.sci.osaka-u.ac.jp`