Cartan calculi on the free loop spaces

内藤　貴仁 (日本工業大学)

この講演では，自由ループ空間に関連する homotopy Cartan calculus について解説し，それらの性質や具体的計算について紹介する．尚，本研究は栗林勝彦氏，若月駿氏，山口俊博氏との共同研究であり，講演内容は [KNWY] に基づく．

古典的な (homotopy) Cartan calculus の例として，滑らかな多様体 M 上のベクトル場 X に対して定義される，de Rham 複体 $(\Omega^*(M), d)$ 上の Lie 微分 L_X と内部積 ι_X がある．これらは，写像

$$L, \iota : \mathrm{Der}(C^\infty(M)) \to \mathrm{Der}(\Omega^*(M))$$

を誘導し，Cartan (magic) formula と呼ばれる関係式 $L_X = [d, \iota_X]$ をみたす事が知られている．ここで $[\ ,\ ]$ は，交換子を表す．この構造の定式化が，Fiorenza–Kowalzig [FK] によって次のように与えられている．

定義． (M, d, B) を mixed complex, $(\mathfrak{g}, \delta, [\ ,\ ])$ を dg Lie 代数とする．ここで，(M, d, B) が mixed complex であるとは，d, B がそれぞれ次数 1, -1 の M の微分で，$[d, B] = dB + Bd = 0$ をみたすものである．

(1) $\mathfrak{g}$ の M 上 **homotopy pre-Cartan calculus** とは，次数 1,0, (-1) の線形写像 $e, L, S : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ からなり，任意の $\theta \in \mathfrak{g}$ に対し，次の 3 つの関係式をみたすものである:

$$L_\theta = [B, e_\theta] + [d, S_\theta] + S_{\delta\theta}, \qquad [d, e_\theta] + e_\delta = 0, \qquad [B, S_\theta] = 0.$$

(2) M 上の **homotopy Cartan calculus** とは，homotopy pre-Cartan calculus $(\mathfrak{g}, e, L, S)$ と次数 0 の線形写像 $T : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ であって，任意の $\theta, \rho \in \mathfrak{g}$ に対し，次の 2 つの関係式をみたすものである:

$$[e_\theta, L_\rho] - e_{[\theta,\rho]} = [d, T_{\theta,\rho}] - T_{\delta\theta,\rho} - (-1)^{\deg\theta} T_{\theta,\delta\rho}, \qquad [S_\theta, L_\rho] - S_{[\theta,\rho]} = [B, T_{\theta,\rho}].$$

本講演では，DGA の Hochschild チェイン複体，自由ループ空間の Sullivan モデル，そして自由ループ空間のホモロジー上の homotopy Cartan calculus について紹介し，それらの関係性について述べる予定である．また，有理ホモトピー論を用いた具体的計算や，時間が許せば自由ループ空間の S^1-同変ホモロジー上の Catran calculus についても紹介したい．

参考文献

[FK] D. Fiorenza, N. Kowalzig. Higher brackets on cyclic and negative cyclic (co)homology. Int. Math. Res. Not., 2020(23): 9148–9209.

[KNWY] K. Kuribayashi, T. Naito, S. Wakatsuki, T. Yamaguchi. Cartan calculi on the free loop spaces, arXiv:2207.05941.