単体的集合上の微積分と高次ホロノミー

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺

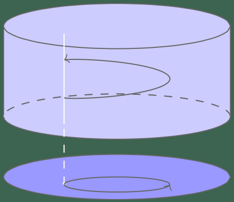
東北大学理学研究科数学専攻
景山諒平

2023 年 9 月 15 日

arXiv:2211:03289

古典的な結果

$\mathcal{M}$ を多様体, $\mathbb{R}^r \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を (自明な) ベクトル束,
$\nabla\colon C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathcal{M}) \to C^\infty(\mathrm{T}^*\mathcal{M} \otimes (\mathbb{R}^r \times \mathcal{M}))$ を接続,
ω を ∇ が与える $\mathfrak{gl}_r(\mathbb{R})$ に値をとる 1 形式とする.
このとき
ベクトル束 $\mathbb{R}^r \times \mathcal{M}$ の閉道 γ に沿ったホロノミー
$\approx$
各ベクトル $v \in \mathbb{R}^r$ を閉道 γ に沿って平行移動させる自己線型写像



特に $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ が成り立つ ($= \nabla$ が平坦である) とき,
基本群の表現 $\pi_1(\mathcal{M}, x) \to \mathrm{GL_r}(\mathbb{R})$ が得られる.

ホロノミーは Chen の反復積分を用いて

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int \int \underbrace{\omega \dots \omega}_{r} = 1 + \int \int \omega + \int \int \omega\omega + \dots$$

と記述できる. ただし

- 1 次元のとき
  - $\omega \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{gl}(V)$.
  - $(d \otimes 1)\omega + \omega \wedge \omega = 0$
  - V は有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$.
  - $\mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数.
- 2 次元のとき,
  - $\omega \in \bigoplus_{r=0}^{1} \mathcal{A}^{r+1}(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{gl}(\mathcal{V})_r$.
  - $(1 \otimes d)\omega + (d \otimes 1)\omega + \varepsilon(\omega) \wedge \omega = 0$.
  - $\mathcal{V}$ は有限型の鎖複体$/\mathbb{R}$.
  - $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ は differential crossed module.

定理 (主結果)

これらの結果に対する**単体的集合における類似**が考えられる.

	ホロノミー	2 次ホロノミー	主結果
係数環	体 $\mathbb{R}$	体 $\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}\langle\vartheta\rangle$
	有限次元 ベクトル空間 V	有限型の 鎖複体 $\mathcal{V}$	
空間	C^∞ 多様体 $\mathcal{M}$	C^∞ 多様体 $\mathcal{M}$	単体的集合 X
定義域	亜群 $\mathcal{P}_1(\mathcal{M})$	2-圏 $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$	単体的集合 $[\Delta[1], X]$
Lie 代数	Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$	2-Lie 代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$	連結 L_∞ 代数 $\mathfrak{g}$
接続	$\mathfrak{gl}(V)$ 値微分 1 形式	$\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ 値微分形式	単体的写像 $X \to \mathcal{A}^1_\bullet\langle\vartheta\rangle^\wedge_\mathfrak{g}$
値域	Lie 群 $\mathrm{Aut}(V)$	2-圏 $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$	dg 代数 $\mathcal{G}\langle\vartheta\rangle_\mathfrak{g}$

単体的集合を用いる動機

- ホロノミーが与えるのはホモトピー群の情報だから.
  - $\mathcal{M}$ のパスや 2-パスは特異単体複体 $S(\mathcal{M})$ でも記述できる.
  - ホモトピー論的に位相空間と単体的集合は “等価”.
- 亜群ではなく $(\infty, 0)$-圏として扱いやすいと思ったから.
- (∞, n)-圏への拡張を考える手がかりになるかもしれないから.
  - $(\infty, 1)$-圏の代表的なモデルの quasi-category は単体的集合.
  - 単体的集合に付加構造を与えることで (∞, n)-圏のモデルが考えられる.

反復積分

パス空間 $C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ 上の微分形式を構成する方法.

1. $\omega_1,\ldots,\omega_r$: 多様体 $\mathcal{M}$ 上の微分形式
2. $\mathrm{pr}_1^*\omega_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{pr}_r^*\omega_r$: $\underbrace{\mathcal{M}\times\cdots\times\mathcal{M}}_{r}$ 上の微分形式
3. ある写像 $\Delta_r\times C^\infty([0,1],\mathcal{M})\to\mathcal{M}\times\cdots\times\mathcal{M}$ で引き戻す
(ただし $\Delta_r:=\{(t_1,\ldots,t_r)|1\geq t_1\geq\cdots\geq t_r\geq 0\}$)
4. 射影 $\mathrm{pr}_{\Delta_r}:\Delta_r\times C^\infty([0,1],\mathcal{M})\to C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ に沿って
ファイバー積分する

以上でパス空間 $C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ 上の微分形式

$$\int\omega_1\cdots\omega_r:=\mathrm{pr}_{\Delta_r*}(\omega_1\times\cdots\times\omega_r)$$

を得る.

ファイバー積分

- “射影” $p\colon E \to B$ による E 上の微分形式の押し出し.
- 射影 $\mathrm{pr}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が与えられたとき,
  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ 上の微分形式 ω は局所的には

$$(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m) \wedge \mathrm{pr}^* \alpha + \beta \qquad (\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{N}), \beta \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}))$$

と書ける. この表示に対して

$$\mathrm{pr}_* \omega := \left(\int_{\mathcal{M}} f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m\right)\alpha$$

で得られる微分形式 $\mathrm{pr}_*\omega$ が ω の射影 pr に沿ったファイバー積分.

単体的集合上の微分形式

- Δ_n 上の "滑らかな" 微分形式のなす可換 dg 代数 $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathrm{sm}}([n])$ を割り当てることで単体的可換 dg 代数 $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathrm{sm}}$ を得る.
このとき多様体 $\mathcal{M}$ 上の微分形式 ω に対し,
$$\omega(\gamma) := \gamma^*\omega \qquad\qquad (\gamma\colon \Delta_r \to \mathcal{M}\colon \text{“smooth”})$$
と定めることで単体的写像 $\omega\colon S_{\mathrm{sm}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{\bullet}_{\mathrm{sm}}$ を得る.
- $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]/(\sum_i x_i - 1)$ の Kähler 微分加群 $\mathcal{A}^1_{\mathrm{PL}}([n])$ の与える可換 dg 代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{PL}}([n]) = \mathrm{Sym}(\mathcal{A}^1_{\mathrm{PL}}([n])[1])$ を割り当てることで単体的可換 dg 代数 $\mathcal{A}^{\bullet}_{\mathrm{PL}}$ を得る.
このとき単体的写像 $X \to \mathcal{A}^{\bullet}_{\mathrm{PL}}$ は X 上の微分形式と対応する.

これらと同じように "微分形式のモデル" を作りそれを貼り合わせる.

$$\mathrm{Hom}(X, \mathcal{A}) \cong \mathrm{Hom}(\varinjlim_n \Delta[n], \mathcal{A}) \cong \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Delta[n], \mathcal{A}) \cong \varprojlim_n \mathcal{A}_n$$

各 $n \geq 0$ に対し “最も小さい” モデルとして $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ から得られる可換 dg 代数を割り当てて “微分形式のモデル” を作りたい.

しかし積分には $\frac{x^n}{n!}$ の形の元が必要.

$$\int_0^1 \int_y^1 xydxdy = \int_0^1 (\frac{1^2}{2!}y - \frac{y^2}{2!}y)dy = \frac{1^2}{2!} \cdot \frac{1^2}{2!} - \frac{1^3}{3!}$$

$\rightarrow$
$\mathbb{Q}[\vartheta]$ の部分環 $\mathbb{Z}\langle\vartheta\rangle = \mathbb{Z}[\vartheta, \frac{\vartheta^2}{2!}, \frac{\vartheta^3}{3!}, \ldots]$ を $\mathbb{Q}$ の代わりの係数環に用いる.
($\frac{\vartheta^n}{n!}$ を $\vartheta^{[n]}$ と表記する.)

また $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ も同じように “広げる”.
(正確には divided power polynomial ring を使う.)
こうして得られる単体的可換 dg 代数を $\mathcal{A}^\bullet\langle\vartheta\rangle$ と表記し,
単体的写像 $\omega\colon X \rightarrow \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を X 上の微分形式とみなす.

積分のアイデア

局所的に “多項式” であることを利用して積分を定式化する.

$f = \sum_{N_1,\dots,N_r} m_{N_1,\dots,N_r} x_1^{[N_1]} \cdots x_r^{[N_r]}$ に対し

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f d_{i_1} := \sum m x_1^{[N_1]} \cdots (\beta_1^{[N_{i_1}+1]} - \alpha_1^{[N_{i_1}+1]}) \cdots x_r^{[N_r]}$$

$$\int_{\alpha_p}^{\beta_p} \cdots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f d_{i_1} \dots d_{i_p} := \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \left(\int_{\alpha_{p-1}}^{\beta_{p-1}} \cdots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f d_{i_1} \dots d_{i_{p-1}} \right) d_{i_p}$$

単体的集合上の積分

射影 $\mathrm{pr}\colon X \times U \to X$ に沿ったファイバー積分を構成したい.

	入力	出力
微分形式	$\omega\colon X \times U \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$	$\mathrm{pr}_*\omega\colon X \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$
帰納系	$\{\omega_x\colon \Delta[n] \times U \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle\}_{x\in X}$	$\{\mathrm{pr}_*\omega_x\colon \Delta[n] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle\}_{x\in X}$

そこで以下の手順で構成する：

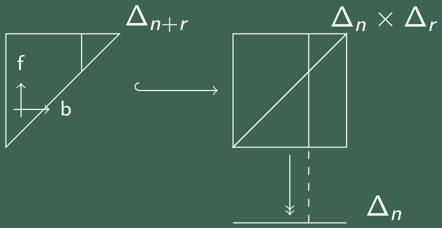
0. $\omega\colon X \times U \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ に対し
   $\Delta[n] \times \Delta[r] \xrightarrow{x\times u} X \times U \xrightarrow{\omega} \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を $\omega_{x,u}$ と定める.
1. $\omega_{x,u}\colon \Delta[n] \times \Delta[r] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ から
   ${\mathrm{pr}_{\Delta[n]}}_*\omega_{x,u}\colon \Delta[n] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を構成する.
2. "和 $\sum_{u\in U} {\mathrm{pr}_{\Delta[n]}}_*\omega_{x,u}$" として ${\mathrm{pr}_{\Delta[n]}}_*\omega_x\colon \Delta[n] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を定める.
3. ${\mathrm{pr}_{\Delta[n]}}_*\omega_x$ を貼り合わせて ${\mathrm{pr}_{\Delta[n]}}_*\omega$ を構成する.

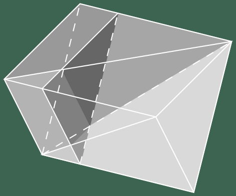
脈体函手は忠実充満な右随伴なので, 順序集合の議論に帰着できる.

$[n] \times [r] \cong \bigcup_{\Gamma\colon [n+r] \hookrightarrow [n]\times[r]} [n+r]$ という分解が存在する.
“埋め込み” $\Gamma\colon [n+r] \hookrightarrow [n] \times [r]$ に対し

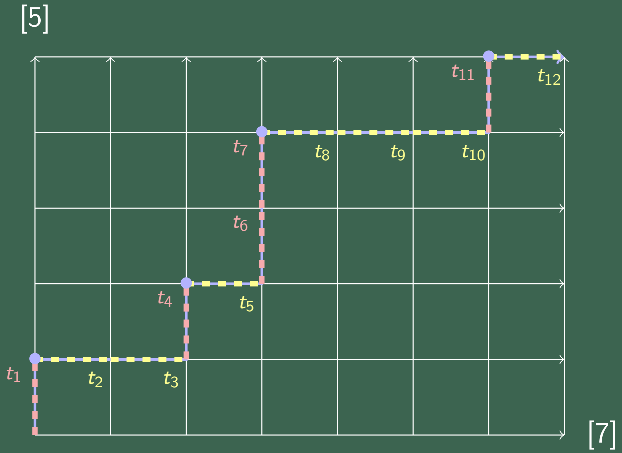
- $\mathrm{b}_\Gamma(i) := \min\{j \in [n+r] | \mathrm{pr}_{[n]}\Gamma(j) = i\}$ で与えられる単調増加関数 $\mathrm{b}_\Gamma\colon [n] \to [n+r]$ が “射影と垂直な方向” を
- $\mathrm{f}_\Gamma(i) := \min\{j \in [n+r] | \mathrm{pr}_{[r]}\Gamma(j) = i\}$ で与えられる単調増加関数 $\mathrm{b}_\Gamma\colon [n] \to [n+r]$ が “射影と水平な方向” を

それぞれ表す.





更に $\mathrm{u}_\Gamma(i) := \mathrm{f}_\Gamma(\min\{j \geq 1 | \mathrm{f}_\Gamma(j) - j = \mathrm{f}_\Gamma(i) - i\}) - 1$ と定める.

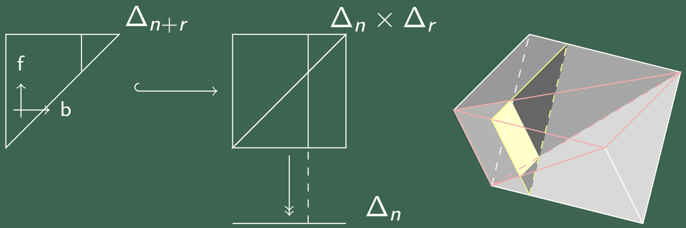


- $[n+r] \xrightarrow{\Gamma} [n] \times [r]$:単射単調増加関数

このとき埋め込み $||\Gamma_*||\colon \Delta_{n+r} \hookrightarrow \Delta_n \times \Delta_r$ の像の
点 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n$ のファイバー $\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap \mathrm{Im}||\Gamma_*||$ は

$$\{(t_1, \ldots, t_{n+r}) | t_{\mathrm{b}_\Gamma(i)} = x_i\}$$

で与えられる.



- ω:$\Delta_n \times \Delta_r$ 上の微分形式
- $||\Gamma_*||^*\omega = fdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+r}$:$\Delta_{n+r}$ 上の微分形式
- $[n+r] \xrightarrow{\Gamma} [n] \times [r]$:単射単調増加関数

“$||\Gamma_*||^*\omega$ のファイバー積分” は

$$
\begin{aligned}
&\text{“}\int_{\Delta_{n+r},\Gamma} fdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+r}\text{”} \\
=&(\pm)\Big(\int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(r)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(r)}} \cdots \int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(1)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(1)}} fdx_{\mathrm{f}_\Gamma(1)} \ldots dx_{\mathrm{f}_\Gamma(r)}\Big) dx_{\mathrm{b}_\Gamma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\mathrm{b}_\Gamma(n)}
\end{aligned}
$$

で与えられる.

これを各埋め込みに対して考えて足し合わせたものが
“ω のファイバー積分”

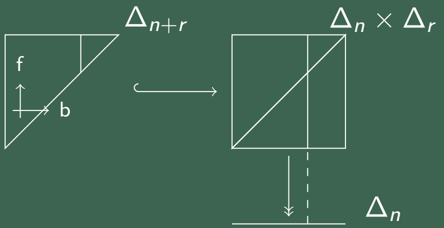
単体的集合 $\Delta[n]\times\Delta[r]$ 上の微分形式 $\omega\colon \Delta[n]\times\Delta[r]\to\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ に対しても，各埋め込み $\Gamma_*\colon \Delta[n+r]\hookrightarrow\Delta[n]\times\Delta[r]$ による引き戻し

$$\Gamma_*^*\omega = f dx_{\mathrm{f}_\Gamma(1)}\wedge\cdots\wedge dx_{\mathrm{f}_\Gamma(r)}\wedge((\mathrm{pr}_{\Delta[n]}\Gamma)^*\alpha)+\beta$$

の "積分"

$$\Big(\int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(r)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(r)}}\cdots\int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(1)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(1)}} f dx_{\mathrm{f}_\Gamma(1)}\dots dx_{\mathrm{f}_\Gamma(r)}\Big)\alpha$$

の総和を考えることでファイバー積分できそう.



実は射影と垂直な方向に退化しているとうまくいかない.

微分形式 $\omega\colon \Delta[n]\times\Delta[r]\to\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle \overset{1:1}{\Longleftrightarrow} \omega^\wedge\in[\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_n$
Eilenberg-Zilber の補題より

- $\tilde{\omega}^\wedge\in[\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_m$ が非退化
- $\omega=(\sigma\times 1)^*\tilde{\omega}$

を満たす全射 $\sigma\colon[n]\to[m]$ が一意的に存在する.

命題

$\omega\in[\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_n$ が非退化ならば, その面 $d_i\omega$ $(0\le i\le n)$ も非退化.

各 $\Gamma\colon[n+r]\hookrightarrow[n]\times[r]$ に対し $x_{\mathrm{b}_{\Gamma(i)}}\mapsto \mathrm{b}_i, x_{\mathrm{f}_{\Gamma(i)}}\mapsto\mathrm{f}_i$ となるよう定める.

$$
\begin{aligned}
&[\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_n\\
=&\mathrm{Hom}(\Delta[n]\times\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle)\\
\subset&\prod_{\Gamma\colon[n+r]\hookrightarrow[n]\times[r]}\mathcal{A}_{n+r}\langle\vartheta\rangle\\
\subset&\prod_{\Gamma\colon[n+r]\hookrightarrow[n]\times[r]}\mathrm{Sym}(\langle d\mathrm{b}_1,\dots,d\mathrm{b}_n,d\mathrm{f}_1,\dots,d\mathrm{f}_r\rangle_{\mathbb{Z}\langle\vartheta,\mathrm{b}_1,\dots,\mathrm{b}_n,\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_r\rangle}[1])
\end{aligned}
$$

- 各 $\Gamma\colon [n+r] \hookrightarrow [n] \times [r]$ ごとに定まる埋め込み

$$\mathcal{A}_{n+r}\langle\vartheta\rangle \subset \mathrm{Sym}(\langle d\mathrm{b}_1, \ldots, d\mathrm{b}_n, d\mathrm{f}_1, \ldots, d\mathrm{f}_r\rangle_{\mathbb{Z}\langle\vartheta,\mathrm{b}_1,\ldots,\mathrm{b}_n,\mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_r\rangle}[1])$$

  はレトラクションをもつ.
- $\alpha^*\colon [\Delta[r], \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_m \to [\Delta[r], \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_n$ に対応する射が

$$\mathrm{Sym}(\langle d\mathrm{b}_1, \ldots, d\mathrm{b}_n, d\mathrm{f}_1, \ldots, d\mathrm{f}_r\rangle_{\mathbb{Z}\langle\vartheta,\mathrm{b}_1,\ldots,\mathrm{b}_n,\mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_r\rangle}[1])$$

  に対しても定まる. 特に $\mathrm{f}_i, d\mathrm{f}_i$ は動かない.
- 全射 σ の与える射の像に含まれるとき, またそのときに限り “変数” $\mathrm{b}_i, d\mathrm{b}_i$ のうち抜けているものが存在する.

以上を組み合わせて計算することで

面 $d_i\omega$ が退化しているならば ω も退化している

ことを示せる.

$\omega\colon \Delta[n]\times\Delta[r]\to\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を微分形式とする.

1. $\tilde{\omega}^{\wedge}\in[\Delta[r],\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_m$ が非退化になるよう $\omega=(\sigma\times 1)^*\tilde{\omega}$ と分解.
2. 各 $\Gamma\colon[m+r]\hookrightarrow[m]\times[r]$ で $\tilde{\omega}$ を引き戻し,
$$\Gamma^*\tilde{\omega}=\sum_i f_{\Gamma,i}dx_{\mathsf{f}_\Gamma(1)}\wedge\cdots\wedge dx_{\mathsf{f}_\Gamma(1)}\wedge((\mathrm{pr}_{\Delta[n]}\Gamma)^*\omega_{\Gamma,i,\mathsf{b}})+(\text{others})$$
という形に分解する.
3. 各 $\Gamma\colon[m+r]\hookrightarrow[m]\times[r]$ に対し
$$\int_{\Delta[r]^\Gamma}\omega:=\sum_i \mathsf{b}_\Gamma^*\Big(\int_{x_{\mathsf{f}_\Gamma(r)+1}}^{x_{\mathsf{u}_\Gamma(r)}}\cdots\int_{x_{\mathsf{f}_\Gamma(1)+1}}^{x_{\mathsf{u}_\Gamma(1)}}f_{\Gamma,i,}\mathrm{d}x_{\mathsf{f}_\Gamma(1)}\cdots\mathrm{d}x_{\mathsf{f}_\Gamma(r)}\Big)\omega_{\Gamma,i,\mathsf{b}}$$
と定める.
4. その総和として積分を定める:
$$\mathrm{pr}_{\Delta[n]_*}\omega:=\sum_{\Gamma\colon[n+r]\hookrightarrow[n]\times[r]}\sigma^*\Big(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}\Big).$$

補題

微分形式 $\omega\colon \Delta[n] \times \Delta[r] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ と単調増加関数 $\alpha\colon [m] \to [n]$ に対し

$$\alpha^* \mathrm{pr}_{\Delta[n]*}\omega = \mathrm{pr}_{\Delta[m]*}((\alpha \times \mathrm{id})^*\omega).$$

が成り立つ.

以下のような分解を考える.

$$\begin{tikzcd}
\Delta[m] \times \Delta[r] \arrow[r, "\alpha\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\sigma_\alpha\times\mathrm{id}"'] & \Delta[n] \times \Delta[r] \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "\sigma\times\mathrm{id}"] & \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle \\
\Delta[l] \times \Delta[r] \arrow[r, "\sigma_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id}"'] \arrow[ur, "\delta_\alpha\times\mathrm{id}"] & \Delta[q] \times \Delta[r] \arrow[r, "\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id}"'] & \Delta[p] \times \Delta[r] \arrow[u, "\tilde{\omega}"']
\end{tikzcd}$$

ただし $\tilde{\omega}^\wedge \in [\Delta[r], \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle]_p$ は非退化. よって $((\delta_{\sigma\delta_\alpha} \times 1)^*\tilde{\omega})^\wedge$ も非退化.

ちょっと乱暴に変形すると

$$\begin{aligned}\alpha^*\mathrm{pr}_{\Delta[n]_*}\omega &= \sum_{\Gamma\colon [p+r]\hookrightarrow[p]\times[r]} (\sigma_{\sigma\delta_\alpha}\sigma_\alpha)^*\delta^*_{\sigma\delta_\alpha}\Big(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}\Big)\\ &\approx \sum_{\tilde{\Gamma}\colon [q+r]\hookrightarrow[q]\times[r]} (\sigma_{\sigma\delta_\alpha}\sigma_\alpha)^*\Big(\int_{\Delta[r]^{\tilde{\Gamma}}}\tilde{\Gamma}^*(\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id})^*\tilde{\omega}\Big)\\ &= \mathrm{pr}_{\Delta[n]_*}((\alpha\times\mathrm{id})^*\omega)\end{aligned}$$

が成り立つので

- $\delta^*_{\sigma\delta_\alpha}(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}) = 0.$
- $\delta^*_{\sigma\delta_\alpha}(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}) = (\int_{\Delta[r]^{\tilde{\Gamma}}}\tilde{\Gamma}^*(\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id})^*\tilde{\omega})$ となる $\tilde{\Gamma}\colon [q+r]\hookrightarrow[q]\times[r]$ が存在する.

のどちらかが成り立ち, さらに任意の $\tilde{\Gamma}\colon [q+r]\hookrightarrow[q]\times[r]$ に対し $\delta^*_{\sigma\delta_\alpha}(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}) = (\int_{\Delta[r]^{\tilde{\Gamma}}}\tilde{\Gamma}^*(\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id})^*\tilde{\omega})$ となる Γ が存在すればよい.

次の引き戻し図式を考える：

$$\begin{tikzcd} {[h]} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook, "\tilde{\Gamma}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[p+r]} \arrow[d, hook, "\Gamma"] \\ {[q]\times[r]} \arrow[r, "\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id}"'] & {[p]\times[r]} \end{tikzcd}$$

- $h < q + r$ のとき，“積分範囲” を調べることで

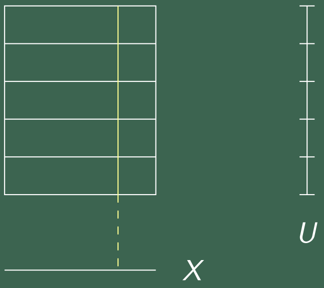
$$\begin{aligned} &\delta^*_{\sigma\delta_\alpha}\Big(\int_{\Delta[r]^\Gamma}\Gamma^*\tilde{\omega}\Big) \\ :=&\sum_i \delta^*_{\sigma\delta_\alpha}\mathrm{b}^*_\Gamma\Big(\int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(r)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(r)}}\cdots\int_{x_{\mathrm{f}_\Gamma(1)+1}}^{x_{\mathrm{u}_\Gamma(1)}} f_{\Gamma,i,}\mathrm{d}x_{\mathrm{f}_\Gamma(1)}\cdots\mathrm{d}x_{\mathrm{f}_\Gamma(r)}\Big)\omega_{\Gamma,i,\mathrm{b}} \\ =&0 \end{aligned}$$

  がわかる．
- $\tilde{\Gamma}\colon [q+r]\hookrightarrow[q]\times[r]$ が与えられたとき，$\tilde{\Gamma}$ が $\delta_{\sigma\delta_\alpha}\times\mathrm{id}$ に沿った引き戻しになるような $\Gamma\colon[p+r]\hookrightarrow[p]\times[r]$ が一意的に存在する．

これらが有限半順序集合に関する (初等的な) 議論から従う．

射影 $X \times U \to X$ に沿ったファイバー積分

$\omega\colon X \times U \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$:微分形式



U の単体 $u \in U$ ごとに定まる微分形式 $(1 \times \mathrm{in}_u)^*\omega\colon X \times \Delta[n] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ の積分の和として ω の積分を定めたい

各 $n \geq 0$ に対し $f_n := x_1 + n\vartheta$ と定める.

$$
\begin{tikzcd}
& \Delta[0] \arrow[dl, "\delta_0^*"'] \arrow[dr, "\delta_1^*"] & & \Delta[0] \arrow[dl, "\delta_0^*"'] \arrow[dr, "\delta_1^*"] & & \Delta[0] \arrow[dl, "\delta_0^*"'] \arrow[dr, "\delta_1^*"] & & \cdots & \\
\Delta[1] \arrow[d, "f_0\,dx_1"'] & & \Delta[1] \arrow[dll, "f_1\,dx_1"'] & & \Delta[1] \arrow[dllll, "f_2\,dx_1"'] & & \Delta[1] \arrow[dllllll, "f_3\,dx_1"] & & \cdots \\
\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle & & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

これより得られる微分形式 $\Delta[0] \times (\bigcup_n \Delta[1]) \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ の
射影 $\Delta[0] \times (\bigcup_n \Delta[1]) \to \Delta[0]$ に沿った (ファイバー) 積分とは？

微分形式 $dx_1 + dx_1 \wedge dx_2 \colon \Delta[2] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ の
射影 $\Delta[0] \times \Delta[2] \to \Delta[0]$ に沿った (ファイバー) 積分は？

- $\Delta[2]$ の非退化な単体は

$$\underbrace{\Delta\{0\}, \Delta\{1\}, \Delta\{2\}}_{0\text{ 単体}}, \underbrace{\Delta\{0,1\}, \Delta\{0,2\}, \Delta\{1,2\}}_{1\text{ 単体}}, \underbrace{\Delta[2]}_{2\text{ 単体}}$$

- dx_1 の $\Delta\{0,1\}, \Delta\{0,2\} \subset \Delta[2]$ への引き戻しは dx_1

微分形式 $\omega\colon X \times U \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ に対し

$$\bigcup_r \{u \in U_r \mid ((\mathrm{id} \times u)^*\omega)^\wedge \in [X, \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle^\wedge_{\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}}]_r \text{ is non-degenerate.}\}$$

で定義される集合 $\mathrm{supp}_{\mathrm{pr}_X}(\omega)$ が有限集合のとき，
射影 $X \times U \to X$ の方向に沿って有限な台をもつという．

$\mathrm{supp}_{\mathrm{pr}_X}(\omega)$ には

$$u_1 \leq u_2 \text{ iff } u_1 = \delta^* u_2 \text{ for some order-preserving map } \delta\colon [r_1] \to [r_2].$$

で順序が定まる．この順序における極大元の集合を $\mathrm{part}_\omega(U)$ と書く．

$$\mathrm{pr}_{X*}\omega \coloneqq \sum_{u \in \mathrm{part}_\omega(U)} \mathrm{pr}_{X*}((\mathrm{id} \times u)^*\omega).$$

Stokes の定理

ファイバー積分の Stokes の定理

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega - \int_{\partial\mathcal{M}} \omega = (\pm) d \int_{\mathcal{M}} \omega \qquad \omega \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$$

の類似を考えたい.

Q. 一般の単体的集合の境界とは？

単体ホモロジーの構成では, 単体の面の交代和を全て足し上げた

$$\sum_{x} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i x\delta_i$$

を境界だと考えていた. これを真似る.

単体的集合上の (境界) ファイバー積分

ω:射影 $X \times U \to X$ の方向に沿って有限な台をもつ微分形式

$$\mathrm{pr}_{X*}\omega := \sum_{u \in \mathsf{part}_\omega(U)} \mathrm{pr}_{X*}((\mathrm{id} \times u)^*\omega)$$

$$\partial\mathrm{pr}_{X*}\omega := \sum_{(\Delta[r] \xrightarrow{u} U) \in \mathrm{part}_\omega(U)} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \mathrm{pr}_{X*}((\mathrm{id} \times u\delta_i)^*\omega)$$

定理

ω:射影 $X \times U \to X$ の方向に沿って有限な台をもつ微分形式

$$\mathrm{pr}_{X*}\mathrm{d}\omega - \partial\mathrm{pr}_{X*}\omega = \sum_{(\Delta[r] \xrightarrow{u} U) \in \mathrm{part}_\omega(U)} (-1)^r \mathrm{d}\mathrm{pr}_{X*}((\mathrm{id} \times u)^*\omega)$$

局所的には "多項式" なので微積分学の基本定理が使え, 境界での積分と積分の微分が結びつく.

反復積分

パス空間 $C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ 上の微分形式を構成する方法.

1. $\omega_1,\ldots,\omega_r$: 多様体 $\mathcal{M}$ 上の微分形式
2. $\mathrm{pr}_1^*\omega_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{pr}_r^*\omega_r$: $\underbrace{\mathcal{M}\times\cdots\times\mathcal{M}}_{r}$ 上の微分形式
3. ある写像 $\Delta_r\times C^\infty([0,1],\mathcal{M})\to\mathcal{M}\times\cdots\times\mathcal{M}$ で引き戻す
(ただし $\Delta_r:=\{(t_1,\ldots,t_r)|1\geq t_1\geq\cdots\geq t_r\geq 0\}$)
4. 射影 $\mathrm{pr}_{\Delta_r}:\Delta_r\times C^\infty([0,1],\mathcal{M})\to C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ に沿って
ファイバー積分する

以上でパス空間 $C^\infty([0,1],\mathcal{M})$ 上の微分形式

$$\int\omega_1\cdots\omega_r:=\mathrm{pr}_{\Delta_r*}(\omega_1\times\cdots\times\omega_r)$$

を得る.

単体的集合 X 上の微分形式 $\omega_1, \ldots, \omega_r \colon X \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ から以下で
単体的集合 $[\Delta[1], X]$ 上の微分形式 $\int \omega_1 \ldots \omega_r \colon [\Delta[1], X] \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
{[\Delta[1],X]^r \times \Delta[1]^r} \arrow[r, equal] & {(\Delta[1] \times [\Delta[1],X])^r} \arrow[d, "(\mathrm{ev})^r"] & & \\
{[\Delta[1],X] \times \Delta[r]} \arrow[u, "\mathrm{diagonal} \times \iota_r"] \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, equal] & X^r \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{pr}_r^*\omega_r"'] & X^r \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[d, "\sqcap_i \mathrm{pr}_i^*\omega_i"] & X \arrow[d, "\omega_i"] \\
{[\Delta[1],X] \times \Delta[r]} \arrow[r, "\omega_1 \times \cdots \times \omega_r"'] & \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle & (\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle)^r \arrow[l, "\wedge"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle
\end{tikzcd}
$$

$$
[\Delta[1], X] \xrightarrow{\int \omega_1 \ldots \omega_r} \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle
$$

L_∞ 代数に値をとる接続

- A_∞ 代数
  := 次数付き加群 $\mathcal{A}_\bullet$ と次数 -1 の線型写像 $D\colon \mathrm{T}\mathcal{A}[1] \to \mathrm{T}\mathcal{A}[1]$
  ≈ 結合代数の高次化 (ホモトピーによる差を無視すれば結合代数)
- L_∞ 代数
  := 次数付き加群 $\mathfrak{g}_\bullet$ と次数 -1 の線型写像 $D\colon \mathrm{Sym}\mathfrak{g}[1] \to \mathrm{Sym}\mathfrak{g}[1]$
  ≈ Lie 代数の高次化 (ホモトピーによる差を無視すれば Lie 代数)

接続は多様体 $\mathcal{M}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式 $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}^1(\mathcal{M})$ を与える.

L_∞ 代数 $(\mathfrak{g}_\bullet, D)$ と各 $n \geq 0$ に対し定まる次数付き加群

$$\mathcal{A}_n^\bullet\langle\vartheta\rangle_{\mathfrak{g}}^\wedge := \prod_{p+\bullet=q} \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_n^q\langle\vartheta\rangle$$

の 1 次の元を "$\Delta[n]$ 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る接続" と考える.
この貼り合わせとして単体的集合 X 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る接続を定義する.
(単体的写像 $X \to \mathcal{A}^1\langle\vartheta\rangle_{\mathfrak{g}}^\wedge$ を X 上の接続と考える.)

Lie 代数から普遍包絡代数として代数が作れるように
L_∞ 代数 $\mathfrak{g}$ から dg 代数 $\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}$ が構成できる.
この dg 代数に対し, 各 $n \geq 0$ について

$$\mathcal{A}^\bullet_n\langle\vartheta\rangle^\wedge_{\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}} \coloneqq \prod_{p+\bullet=q} \mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}^q_n\langle\vartheta\rangle$$

により次数付き代数が定まる. これを貼り合わせたものとして,
すなわち単体的写像 $X \to \mathcal{A}^\bullet\langle\vartheta\rangle^\wedge_{\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}}$ として,
単体的集合 X 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る形式的微分形式を定義する.

形式的微分形式は局所的には $v \otimes \omega \in \prod_{p+\bullet=q} \mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}^q_n\langle\vartheta\rangle$ の形の元の線形和で書くことができる. 積分を

$$v \otimes \omega \mapsto v \otimes \int \omega$$

と拡張することで,
$X \times U$ 上の形式的微分形式の射影 $X \times U \to X$ に沿ったファイバー積分が定義できる.

de Rham 写像

微分形式 $\omega\colon X \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle$ と X の単体の形式和 $\sum_x m_x x$ に対し,

$$\langle \omega, \sum_x m_x x\rangle = \int_{\sum_x m_x x} \omega := \sum_x m_x \mathrm{pr}_{\Delta[0]*} x^* \omega$$

により $\mathbb{Z}\langle\vartheta\rangle$ の元が定まる.
これにより L_∞ 代数 $\mathfrak{g}$ に対し, X 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る微分形式の余鎖複体

$$\mathcal{A}\langle\vartheta\rangle(X, \mathfrak{g}) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(X, \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle^{\wedge}_{\mathbb{U}_\infty \mathfrak{g}})$$

から余鎖複体

$$\mathcal{C}^\bullet\langle\vartheta\rangle(X, \mathfrak{g}) := \prod_{p+\bullet=q} \mathbb{U}_\infty \mathfrak{g}_p \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X]_q, \mathbb{Z}\langle\vartheta\rangle)$$

への鎖準同型が得られる.

余鎖複体 $\mathcal{C}^\bullet\langle\vartheta\rangle(X,\mathfrak{g})$ は積構造を持つ.
これにより単体的代数

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^\bullet\langle\vartheta\rangle_{\mathfrak{g}} &= \mathcal{C}^\bullet\langle\vartheta\rangle(\Delta[n],\mathfrak{g}) \\ &= \prod_{p+\bullet=q} \hat{\mathbb{U}}_\infty\mathfrak{g}_p \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\Delta[n]]_q, \mathbb{Z}\langle\vartheta\rangle)\end{aligned}$$

が得られる. ($\hat{\mathbb{U}}_\infty\mathfrak{g}$ は $\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}$ の完備化.)
これは dg 代数を与える. dg 代数は A_∞ 代数の特殊な場合.
(高次の "積" が全て自明な A_∞ 代数が dg 代数.)

以上を組み合わせることで

- 単体的集合 X 上の L_∞ 代数 $(\mathfrak{g}, D)$ に値を取る接続 $\nabla\colon X \to \mathcal{A}\langle\vartheta\rangle^{\wedge}_{\mathbb{U}_\infty\mathfrak{g}}$

から

- パス空間 $[\Delta[1], X]$ の “表現”

$$\mathcal{H}\mathrm{ol}^{\nabla} := \sum_{r=0}^{\infty} \int\int \underbrace{\nabla \cdots \nabla}_{r} \colon [\Delta[1], X] \to \mathcal{G}\langle\vartheta\rangle_{\mathfrak{g}}$$

を構成することができる.
これを X の (高次) ホロノミー (の表し方の一つ) と考える.

stratified simplicial set

stratified simplicial set

単体的集合 $\tilde{X}$ と部分集合 $tX \subset \bigcup_{p>0} \tilde{X}_p$ の組.

- tX の元を thin simplex という.
- 退化した単体を全て含むこと以外は tX に課される条件はない.
- X の "可逆な単体", あるいは "単体の合成" などを表す.

Kan 複体, quasi-category は "ある horn extension を満たす単体的集合".
同じような "拡張性質" を満たす stratified simpplicial set として
weak complicial set というものが知られている.

- Kan 複体や quasi-category は, thin simplex の集合 tX を適切に定めることで weak complicial set を与える.
- weak complicial set は (∞, n)-圏のモデルになると考えられている.
- 可微分多様体 (あるいは微分空間)$\mathcal{M}$ に対し
  - 滑らかな写像 $\gamma\colon \Delta_n \to \mathcal{M}$ を n 単体
  - $d\gamma_x\colon T_x\Delta_r \to T_x\mathcal{M}$ の退化次数が 0 でない点 $x \in \Delta_n$ が存在するものを thin n-simplex

  と定めることで stratified simplicial set が得られる.

課題

今回の結果を stratified simplicial set に対する類似として,
(∞, n)-圏や微分空間に応用できるような形で拡張できないか？