# On the hierarchy intepolating rationality and ruledness, and its generalizations

南 範彦　　(名工大)

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺

信州大学理学部 第1講義室 ＆ $\boxed{\text{Zoom}}$

2023年9月15日, 14:00〜15:00

# On the hierarchy intepolating rationality and ruledness, and its generalizations

南 範彦　　(名工大)

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺

信州大学理学部 第１講義室 ＆ $\boxed{\text{Zoom}}$

2023年9月16日, 11:30〜12:30

## 自己紹介-1

- 日本数学会2010年度年会(於慶應義塾大学理工学部)での，島川和久さんのトポロジー分科会特別講演「微分空間とホモトピー論」の講演の中で，以下の質問をしました：

  「微分空間の定めるホモトピー圏は，結局は通常の位相空間のホモトピー圏と同値で，エキゾチックな微分構造など捉えられないのでは？」[a]

- 私は大局的なホモトピー論を研究してきましたが，伝統的な純ホモトピー論的手法に限界を感じ，ゲージ理論，$\mathbb{F}_1$-スキーム，モチーフ理論，双有理代数幾何学などに於いて，これを打開するヒントを探す旅に出て居りました．

[a] 実際の講演では，その後に何が起こったかを述べました．その際述べましたように，日本のホモトピー論の現状はそれから変って居ません．寧ろ一層悪くなっています．

## 自己紹介-2

- 特にここ数年は，古典的ホモトピー論のクロマティックホモトピー論(e.g. $X \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_n L_{K(0)\vee K(1)\vee\cdots\vee K(n)}X$) の類似をモチビックホモトピー論においても構築するために，代数幾何における階層構造を探究してきました．
  そしてここ1〜２年，rationality （有理性） とruledness (線織性) の間を補間する階層構造とその様々な一般化に関して幾つかの結果が次々に得られて来ましたので，今回はそのような結果の中から，極めて根源的な超曲面の場合，トポロジストにも馴染み深い有限群の分類空間の場合(Noether問題と呼ばれるものに対応します)，そして最後に，整ホッジ予想反例の代数幾何的条件探究から現れる，２重階層構造をお話します．

# 複素超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ のrationality(有理性)問題から，rationality (有理性) とruledness (線織性) の間を補間する階層構造とその様々な一般化

高校以来の微積では，円周上の微積を直線上の微積に帰着する：

$$\begin{array}{ccc} \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} & \overset{\sim}{\dashleftarrow} & \mathbb{A}^1 \\ \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) & \longleftarrow\!\shortmid & t \end{array}$$

これは円周全体ではなくそれから１点を除いた部分と直線との同型を与え，円周と直線の間の 双有理同値 を与える：

$$\begin{aligned} & \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \setminus \{(-1,0)\} \cong \mathbb{A}^1 \\ \Longrightarrow \quad & \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \overset{\textbf{bir}}{\sim} \mathbb{A}^1 \left(\overset{\textbf{bir}}{\sim} \mathbb{P}^1\right) \end{aligned}$$

体$k$(本講演では直ぐに (dense open smooth locus 存在のため) 『perfect』と仮定 します) 上の代数多様体 (即ち, separated and integral scheme of finite type over $k$) $X, Y$ は

$$X \underset{\text{Zariski dense open}}{\supseteq} \exists U \cong \exists V \underset{\text{Zariski dense open}}{\subseteq} Y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{関数体の同型:} \quad k(X) \cong k(Y)$$

のとき， 双有理同値 と呼ばれ，ここでは次のように表す：

$$X \overset{\text{bir}}{\sim} Y \qquad (\text{birational equivalent})$$

$n$次元代数多様体$X$は$X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^n (\overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^n)$, 即ち, $k(X) \cong k(X_1, \cdots, X_n)$ $:= Frac(k[X_1, \cdots, X_n])$ のとき， rational(有理) と呼ばれる．

## 複素超曲面のrationality(有理性)問題

- アファイン代数多様体 $X \subset \mathbb{A}_k^n$ が 有理的であることと，その射影コンパクト化 $\overline{X} \subset \mathbb{P}^k$ が有理的であることとは同値．

  <u>例：</u> $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ の場合，$x = \frac{\overline{x}}{\overline{z}}, y = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$として

$$\overline{X} = \{(\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}) \mid \overline{x}^2 + \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

- 体$k$上の代数多様体 $X$ が$k$上有理的なら，任意の体拡大 $k \subset K$ に対応する係数拡大 $X_K$ は$K$上有理的．上の例で$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$の場合

$$\overline{X}_{\mathbb{C}} = \{(\overline{x} : \overline{y} : \overline{z}) \mid \overline{x}^2 + \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

### 複素超曲面のrationality(有理性)問題

複素$n$次元$d$次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ はいつrational(有理的)？

## 複素超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ rationality(有理性)問題周辺-19C迄

- $d = 1, 2$ の場合は，常にrational.
- $n = 1$ の場合，$X_d \subset \mathbb{P}^2$ が非特異(この場合，穴の個数 $g(X_d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$) ならば，

$$X_d \text{ は rational} \iff d = 1, 2.$$

- (次の驚くべき結果が得られた後は中々進展がなかった...)

**(Alfred Clebsch, 1866)** $n = 2, d = 3$ の場合，非特異な $X_3 \subset \mathbb{P}^3$ は rational.

- (暫くして，極めて影響力のある問題が提出された) ($k = \mathbb{C}$)

Lüroth 問題： $X$ : unirational ,i.e. $k(X) \subset k(\mathbb{P}^N) \Longrightarrow X$ rational?

– **(J. Lüroth, 1876)** $\dim X = 1$なら正しい.

– **(G. Castelnuovo, 1893)** $\dim X = 2$なら正しい.

この後８０年近く，本質的進展は起きなかった...

## 広中先生特異点解消定理後1971〜1972の革命的進展

dim $X=3$の場合，**Lüroth 問題は正しくなかった：.**

**Clemens-Griffiths，1972:** 非特異 $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ は非有理.

これらは全て，**Lüroth**問題の反例となる.

**Iskovskikh-Manin，1971:** 非特異 $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ は非有理.

(Segre 1960)より，これらの一部はLüroth問題の反例.

**Artin-Mumford，1972:** ある 3-fold がLüroth問題の反例

となることを示した. 実はこの場合 安定双有理不変量 ,即ち,

双有理不変のみならず$\mathbb{P}^1$をかけても不変，の$H^3(-,\mathbb{Z})\{tors\}$

が用いられたため，この反例は， 非安定有理 となっている.

更に，安定双有理不変量の短完全系列が存在する：

$$0 \to \overbrace{\mathrm{Coker}\left(c_1 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : Pic(V)\big(:= H^1_{\text{ét}}(V,\mathbb{G}_m)\big) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^2(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)}^{H^0(V,\Omega^2)=0\text{なら，例えばunirationalなら，より一般にrationally connectedなら，}0}$$

$$\to \big(Br(V) := H^2_{\text{ét}}(V,\mathbb{G}_m) = \big)\, \boxed{H^2_{nr}\left(\mathbb{C}(V),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)} \to H^3(V,\mathbb{Z})\{tors\} \to 0$$

それでも，例の問題の一般の場合は，その後暫く進展がなかった

複素超曲面のrationality(有理性)問題

複素$n$次元$d$次超曲面 $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ はいつrational(有理的)？

- “it is not known if there are any smooth rational hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^n$ of degree $d \geq 4$... (Mori always asks this question) ”

  Joe Harris, Lectures on rationally connected varieties September 2001, Notes by Joachim Kock https://mat.uab.cat/~kock/RLN/rcv.pdf の p.4，6〜7行から引用．

- それでも，$d \geq n+2$の場合，$X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が(安定)有理でないことは良く知られている．(これは，$H^0(X, \Omega^n) \neq 0$ から従う．(注意 曲面$C$の場合$g(C) = \dim H^0\left(C, \Omega^1\right)$だった．)

  $\boxed{\text{参考}}$ J. Kollár, BAMS 56, 2019, Th.35, Prop.42.

## “very general hypersurfaces” が対象の中心に...

- **[Hartshorne, p.27, Prop.4.9]**

  任意の $n$次元 variety ($\overset{[Hartshorne, p.104, Prop.4.10]}{=}$ integral, separated scheme of finite type over an algebraic closed field) $V$ は，有る超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ と双有理同値．

  これを眺めると，超曲面の有理性問題は，極めて一般的過ぎる (だから全てを同時に議論するのは大変そうな) 問題に見える．

- 一方，$X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の全体は，それらを表す$d$次同時多項式
$$\sum_{\substack{(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n+2}; \\ \text{s.t. } \sum_{0 \leq j \leq n+1} i_j = d}} c_{(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1})} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_{n+1}^{i_{n+1}} = 0$$
  の各係数 $c_{(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1})}$ を変数として，モジュライ空間を構成する．そのせいぜい可算個のproper閉集合の和に含まれないのがvery general hypersurfacesでこれを対象としよう．

# 最近までに(私以前に)得られた，very general hypersurfacesの結果-1

- [Janos Kollár, JAMS 1995] 次数 $d \geq 2\lceil \frac{n+3}{3} \rceil$ なる very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$) は，ruled でない.
- [Colliot-Thélène-Pirutka, ASENS, 2016] very general hypersurfaces $X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ は，stable rational でない．(実は，retract rational でもない．)

  この結果は，次の結果に一般化され吸収された：
- [Totaro, JAMS 2016] 次数 $d \geq 2\lceil \frac{n+2}{3} \rceil$ なる very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, $X_4 \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ ) は，stable rational でない．(実は，retract rational でもない．)

  この結果は，次の結果に(大々的に？)一般化され吸収された：

# 最近までに(私以前に)得られた，very general hypersurfacesの結果-2

- **[Schreieder, JAMS 2019]** 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して，

$$l_2(n) := \min\left\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 2^l + (l-2) \ \geq \ n\right\}$$

$$\left( \leq \min\left\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 2^l \ \geq \ n\right\} = \lceil \log_2 n \rceil \right)$$

と置けば，次数 $d \geq 2 + l_2(n)$ なる(この条件は，$d \geq 2 + \log_2 n$ なら満たされる) very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, $X_4 \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ ) は，$\boxed{\text{stable}}$ rational でない．(実は，retract rational でもない．)

しかしながら，$d = 3$ に対しては何も言えない．

## rationalityとruledness を補完する階層化に向けて

さて，私は「代数幾何における階層構造」への興味から，これらの結果を，階層的にアップグレードしたい．ヒントとなるのは，"rationality" とKollárさんの定理に現れる "ruled" の定義の，若干の書き換えである（ここで，$n := \dim X$ と置いた）：

- $X$ は rational $\iff$ $X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^n \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^n \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-1}$
- $X$ は ruled $\iff$ $\exists Z^{n-1}$ s.t. $X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^1 \times Z^{n-1} \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^1 \times Z^{n-1}$.

これより，rationalityとrulednessをinterpolateする階層構造が容易く思い浮かばれる．その一方で，Lüroth 問題に関して，以下の(別の)階層関係が知られている：

rational $\Longrightarrow$ stable rational $\Longrightarrow$ ratract rational

$\Longrightarrow$ separably unirational $\Longrightarrow$ separably rationally connected

これらすべてが階層化可能だが，ここでは上の３つだけ階層化する．

$n$-次元 variety (= integral, separated scheme of finite type over a perfect field) $X$ に対し：

- $X$ is $\underline{\underline{(-i)\text{-rational}}}$ or $\underline{\underline{(n-i)\text{-ruled}}}$

  if $\exists$ an $i$-dimensional smooth variety $Z^i$ s.t.

  $$\mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} X.$$

- $X$ is $\underline{\underline{\text{stable } (-i)\text{-rational}}}$ or $\underline{\underline{\text{stable } (n-i)\text{-ruled}}}$

  if $\exists$ an $i$-dim'l smooth variety $Z^i$ and $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.t.

  $$\mathbb{A}^j \times \mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^j \times X.$$

- $X$ is <u>retract $(-i)$-rational</u> or <u>retract $(n-i)$-ruled</u> if $\exists$ an $i$-dim'l smooth $Z^i$. $N \in \mathbb{Z}_{\geq n}$ and rational maps

$$f : X - - > \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i, \quad g : \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i - - > X$$

such that the composition

$$g \circ f : X - - > X$$

is defined, yielding an identity on a dense open subset of $X$.

$X$ and $Y$ are said to be <u>stably birational equivalent</u> when $\mathbb{A}^j \times X \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^k \times Y$ for some $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- stable $(-i)$-rationality and retract $(-i)$-rationality are both stably birational invariant concepts.
- $\{\ (-i)\ \text{-rational}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Longrightarrow \{\text{stable}\ \ (-i)\ \text{-rational}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$
  $\Longrightarrow \{\text{retract}\ \ (-i)\ \text{-rational}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$

これで，私の階層的アップグレードを述べることが出来ます：

## very general hypersurfaces に対する，私の $\boxed{\text{階層的アップグレード}}$ -1

- [Janos Kollár, JAMS 1995] 型：次数 $d \geq 2\lceil \frac{n+3}{3} \rceil$ なる very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$) は，$\boxed{\text{stable}}$ ruled でない．(実際，$\boxed{\text{retract ruled}}$ でもない．)
- [Colliot-Thélène-Pirutka, ASENS, 2016] 型：very general hypersurfaces $X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ は，$\boxed{\text{stable}}$ $\boxed{\text{2-ruled}}$ でない．(実際，$\boxed{\text{retract 2-ruled}}$ でもない．)
- [Totaro, JAMS 2016] 型：次数 $d \geq 2\lceil \frac{n+2}{3} \rceil$ なる very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, $X_4 \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ ) は，$\boxed{\text{stable}}$ $\boxed{\text{2-ruled}}$ でない．(実際，$\boxed{\text{retract 2-ruled}}$ でもない．)

## very general hypersurfaces に対する，私の 階層的アップグレード -2

- **[Schreieder, JAMS 2019]型：** 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して，

$$l_2(n) := \min\left\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 2^l + (l-2) \ \geq \ n\right\}$$
$$\left(\leq \min\left\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 2^l \ \geq \ n\right\} = \lceil \log_2 n \rceil\right)$$

と置けば，次数 $d \geq 2 + l_2(n)$ なる (この条件は，$d \geq 2 + \log_2 n$ なら満たされる) very general hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ (例えば，$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, $X_4 \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$) は，stable $(n+1-l_2(n))$-ruled = stable $-(l_2(n)-1)$-rational でない．(実際，retract類似でもない．)　(だが，$d=3$ に対しては何も言えない．)

メッセージ！

- **私以前では，Totaro氏の結果よりSchreieder氏の結果の方が優れていると認識されていたが，私の階層的観点からはそんなことはない：**

  *Schreieder*氏の難しい試験*(= close to rationality)*に落ちる*(=*の反例となる*)*学生*(=hypersurface)*が，*Totaro*氏の簡単な試験*(=close to ruledness)*に落ちる*(=*の反例となる*)*学生*(=hypersurface)* よりも，沢山いるのは，ある意味自然..

  **Totaro氏の結果もSchreieder氏の結果も，**
  **互いを凌駕せず，共に確固した，素晴らしい結果である！**

- **私以前では，Kollár氏の結果は，stableではないので，少々別枠の結果と思われていたが，私のアップグレードで同じ土俵の素晴らしい結果と判明．例えばvery general な$X_4 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ に対して stable ruled でないことを示せる唯一の結果である！**

## おまけ- “very general” が出てくる大雑把なからくり-1

以下，Schrieder 氏の場合を概観する．複素超曲面のモジュライ空間の代わりに Kollár 氏と Totaro 氏の場合は森重文先生の修士論文での構成を出発点とする：

<u>Step 1</u> 複素超曲面のモジュライ空間を思い出す：

$$
\begin{tikzcd}
\forall X_d = (\mathcal{X}_d)_0,\ \textbf{integral} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{X}_d \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\pi", "\substack{\textbf{proper,}\\ \textbf{flat}}"'] & \mathbb{P}^{n+1} \\
& & \mathbb{P}^{n+2^{H_d}-1}_{\mathbb{C}} \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\mathbb{C} \arrow[r, "0"] & \mathbb{P}^{n+2^{H_d}-1}_{\mathbb{C}} \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^{n+2^{H_d}-1}_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

<u>Step 2</u> $\forall X_d = (\mathcal{X}_d)_0$, **integral** は， <u>very general</u> な $t \in \mathbb{P}^{n+2^{H_d}-1}_{\mathbb{C}}$ における **fiber** $(\mathcal{X}_d)_0$ から， <u>degenerate</u> される，**i.e.** $\exists R$, **DVR, s.t.**

$$
\begin{tikzcd}
Y = (\mathcal{X}_d)_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[d, "\textbf{proper flat}"'] & X = (\mathcal{X}_d)_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k, \substack{\textbf{algebraically closed}\\ \textbf{residue field}} \arrow[r] & \operatorname{Spec} R, \textbf{DVR} & \operatorname{Spec} K, \textbf{quotient field} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$
,

おまけ-　"very general"　が出てくる大雑把なからくり-2

**Step 3** 応用では，Step 2 において，special fiber $Y$ が singularである場合を考えるのが殆どである．そうした場合も含めて，generic fiber $X$ の幾何学的条件がどのように special fiber $Y$ の幾何学的条件に反映するかが知りたい．

- $X$ : ruled $\Longrightarrow$ $Y$ : ruled というのが，
  Matsusaka の定理 (NagoyaMJ，1968) である．
  Kollár氏はこれを用いて，very general hypersurface が ruled でないことを示した．
- (参考) $X, Y$ ともに smooth とすれば，
  $X$ : rational $\Longrightarrow$ $Y$ : rational というのが，Kontsevich-Tschinkel の定理 (InventMath, 2019) から従う．これは特に，一つでも smooth irrational な $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が見つかれば，very general な $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ がirrationalとなることを導く．

おまけ- “very general” が出てくる大雑把なからくり-3

<u>Step 3-続き</u> ここで用いるのは，$Y$がsingularの場合も許し，かつ階層構造を反映した，(Claire Voisin に inspireされた) [Chatzistamatiou-Levine，ANT，2017，Lemma 1.5]の結果である：

$X$ admits a level $i$ decomposition of diagonal

$\Longrightarrow$ $Y$ admits a level $i$ decomposition of diagonal

<u>Step 4</u> 上の level $i$ decomposition of diagonal というものは，Chow motive の枠組みで定義されるもので，smooth proper の場合には，私の階層的な幾何的条件:

“retract $(-i)$ rational” から従うことを示す.

これより，singularでもよいので，一つでもlevel $i$ decomposition of diagonal でない$Y = X_d = \left(\mathcal{X}_d\right)_0$が見つかれば，所望の，very general な $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ がretract $(-i)$ rational でないことが従う.

## 最後の困難

選ばれた$Y = X_d = (\mathcal{X}_d)_0$がlevel $i$ decomposition of diagonal でないことを示したいのだが，それが $\boxed{\text{singular}}$ であるという困難が待っている．そこで，元々の非階層状況(即ち，$i = 0$の場合)での，

- Schreider氏のalterationに関する議論と，
- Kollár氏，Totaro氏 らの標数正での具体的特異点解消

を良く眺め，そこでの，

- Schreider氏のunramified cohomologyを用いた計算，
- Kollár氏，Totaro氏 らの微分形式を用いた計算

の各々が，階層的にアップグレード出来ることを確かる．

これは大変注意して行わなければならないところであるが，

幸いにこの困難は克服出来，証明は完成する． □

# On the hierarchy intepolating rationality and ruledness, and its generalizations

南 範彦　　(名工大)

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺

信州大学理学部 第１講義室 ＆ $\boxed{\text{Zoom}}$

2023年9月16日, 11:30～12:30

本日の予定

- **Noether's problem と SBNR = Stably birationalized unramified sheaf**
- **Schreieder's higher unramified cohomology と integral Hodge conjecture** の反例であることから従う，幾何学的条件

# Noether's problem と

# SBNR = Stably birationalized unramified sheaf

## ネーター問題

$k$を体として，有限群 $G$ を有理関数体 $k\,(x_g \mid g \in G)$ に，生成元への正則作用を通して作用させる．さてこのとき，不変体：

$$k(G) := k\,(x_g \mid g \in G)^G$$

は $k$上有理的か？

- **Richard Swan, Invent. Math. 7 (1969), 148–158**

  は，$\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{47})^{(\mathbb{Z}/47\mathbb{Z})}$ が **rational** でないことを示し，**Noether**問題への最初の反例を与えた．

- しかしながら，このSwan氏の方法では，$k$が複素数体のような代数閉体の場合には，反例を構成できなかったことにある．実際，$k$が複素数体の場合にはすべての有限アーベル群$G$に対してNoether問題が肯定的であることが，100年以上も前に知られていた：

E. Fischer, Transformationen Gött.Nachr.(195),77–80.

- $k$が複素数体のような代数閉体の場合の最初の反例は，

  David J. Saltman, Invent. Math. 77 (1984)

  において，素数$p$に対して位数$p^9$の群$G$を具体的に構成され，それがSaltman氏自身によって導入された retract rationality を満たさないことを示して，与えらえた．

- **Saltman氏の仕事は，Bogomolov 氏によって更に深めれた．そこで中心的な役割を果たしていたのが，Merkurjev氏，Totaro氏らによって認識されたように，有限群の(代数幾何的な意味での)“ 分類空間（classifying stack） ” $BG$ であった：**

  – 有限群$G$を固定し，有限次元複素表現$V$に対して，$G$が自由に作用する部分空間$V^L$を以下のように定める：

$$V^L \;:=\; V \setminus \bigcup_{g\in G\setminus\{e\}} V^g$$

– $G$が忠実に作用する有限次元複素表現$W$を選び，$G$の **分類スキーム(classifying scheme)** $BG$ を次の **ind-scheme** として定義する(**Morel-Voevodsky, Totaro**)：

$$BG := \mathrm{colim}_m\ (W^{\oplus m})^L/G$$

– $k = \mathbb{C}$ のとき，

$$BG := \mathrm{colim}_m\ (W^{\oplus m})^L/G$$

をトポロジストの位相空間の圏での構成と見做せば，これは$G$が忠実に作用する有限次元複素表現$W$の取り方によらず，有限群$G$の分類空間$BG \simeq K(G,1)$のホモトピー型を一意的に与える．

– 代数幾何の観点からも，

$$BG := \mathrm{colim}_m \ (W^{\oplus m})^L / G$$

の 安定双有理同値類 が，$G$が忠実に作用する有限次元複素表現$W$の取り方によらず，一意的に定まることがわかる：

$*$ (復習)　ここで，(既約な) 代数多様体 $X, Y$ が stably birational equivalent (安定双有理同値) であるとは，ある $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，以下の双有理同値

$$X \times \mathbb{A}^i \overset{\text{bir}}{\sim} Y \times \mathbb{A}^j$$

が存在するときを言う．

$*$ 実際，$W_1, W_2$ を共に$G$が忠実に作用する有限次元複素表現とすると， Bogomolov's double fibration method

$$\begin{array}{ccccc} \big((W_1^{\oplus m_1})^L \oplus (W_2^{\oplus m_2})\big)/G & \overset{\textbf{bir}}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} & \big(W_1^{\oplus m_1} \oplus W_2^{\oplus m_2}\big)^L/G & \overset{\textbf{bir}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \big((W_1^{\oplus m_1}) \oplus (W_2^{\oplus m_2})^L\big)/G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle W_2^{\oplus m_2}} & & & & {\scriptstyle W_1^{\oplus m_1}}\Big\downarrow \\ (W_1^{\oplus m_1})^L/G & & & & (W_2^{\oplus m_2})^L/G \end{array}$$

において，上の二つの水平射は共に双有理同値で，左右２つの垂直射は，Zarisiki局所的にfiberを各々アファイン空間 $W_2^{\oplus m_2}, W_1^{\oplus m_1}$ とする積スキームの射影射になるので，安定双有理同値.( no-name lemma (名無しの補題) )

以上から，以下の重要な帰結を得る：

$*$ $\boxed{\text{有限群}G\text{のNoether問題} = BG\text{の安定有理性問題}}$

$*$ 基礎体が複素数体$\mathbb{C}$の場合は，$(BG)_{\mathbb{C}}$が安定有理，或いはより弱く，retract rationalならば，次が成立する：

$$H^i_{nr}(\mathbb{C}(BG)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0, \ \ \forall i > 0.$$

これを用いて，retract rational でない，故に，安定有理でない $BG$ の例が多く見出された．

$*$ しかしながら，これらの研究ではどの程度安定有理，retract有理でないかは，全く議論されて来なかった！

復習

$n$-次元 variety (= integral, separated scheme of finite type over a perfect field) $X$ に対し：

- $X$ is $(-i)$-rational or $(n-i)$-ruled

  if $\exists$ an $i$-dimensional smooth variety $Z^i$ s.t.

$$\mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} X.$$

- $X$ is stable $(-i)$-rational or stable $(n-i)$-ruled

  if $\exists$ an $i$-dim'l smooth variety $Z^i$ and $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.t.

$$\mathbb{A}^j \times \mathbb{A}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{A}^j \times X.$$

– $X$ **is** **retract $(-i)$-rational** **or** **retract $(n-i)$-ruled** **if** $\exists$ **an** $i$**-dim'l** **smooth** $Z^i$. $N \in \mathbb{Z}_{\geq n}$ **and rational maps**

$$f : X - - > \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i, \quad g : \mathbb{A}^{N-i} \times Z^i - - > X$$

**such that the composition**

$$g \circ f : X - - > X$$

**is defined, yielding an identity on a dense open subset of** $X$.

## 希望とそれを阻む困難

### 希望

$$BG_{\mathbb{C}} : \textbf{retrct } (-i) \textbf{ rational}$$

$$\Longrightarrow \quad H^j_{nr}(\mathbb{C}(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0, \ \ \forall j > i$$

### それを阻む困難

**Smooth proper scheme** $X$**に対しては，**

$$X : \textbf{retrct } (-i) \textbf{ rational}$$

$$\Longrightarrow \quad H^j_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0, \ \ \forall j > i$$

**が，Chow motives でlevel** $i$ **decomposition of diagonal であることを用いて示せるが，**$BG$**はsmooth proper scheme でなく，** $\boxed{\textbf{非properな}}$ **smooth schme** $(W^{\oplus m})^L/G$ **たちの ind-scheme:**

$$BG := \mathrm{colim}_m \ (W^{\oplus m})^L/G$$

より具体的には，properとは限らないsmooth scheme間の有理写像

$$f : X - - > Y$$

が，unramified cohomology の間の準同型

$$f^* : H^j_{nr}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \;\to\; H^j_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を誘導するのか，全く明らかでない．それでも，

**Good News!**

私はこの困難を(より一般の枠組みで)解決した！

私は，この雰囲気だけでも説明したい．

最初に，避けてきたunramified cohomology の定義から

[Saltman, InventMath, 1984] [Colliot-Thélène-Ojanguren, InventMath, 1989] [Merkurjev, JLondonMS, 2008] $K/k$ を有限生成体拡大とする．(例：体 $k$ 上の variety $X$ の関数体 $k(X)/k$.) 正整数 $m$ が $\frac{1}{m} \in k$ を満たすとき，unramified cohomology of $K$ over $k$ with coefficients in $\mu_m^{\otimes j}$ $H_{nr}^{j}\left(K/k, \mu_m^{\otimes j}\right)$ を，$H_{et}^{i}\left(K, \mu_m^{\otimes j}\right)$ の，全ての $\boxed{\text{rank1 幾何学的附値}}$ が自明となる元からなる部分群として定義する：

$$0 \to H_{nr}^{j}\left(K/k, \mu_m^{\otimes j}\right) \to H_{et}^{i}\left(K, \mu_m^{\otimes j}\right) \xrightarrow{\prod_{\nu,\text{rank1 幾何学的附値}} \partial_\nu} \prod_{\nu,\text{rank1 幾何学的附値}} H_{et}^{i-1}\left(\kappa_\nu, \mu_m^{\otimes j-1}\right)$$

## 幾何学的附値とは

有限生成体拡大 $K/k$ の rank1 離散附値 $\nu$ が 幾何学的附値とは，

$$tr.deg_k(\kappa_\nu := \mathcal{O}_\nu/m_\nu) = tr.deg_k(K) - 1$$

という代数的な条件を満たすものとして定義されるが，

このとき Zariski による次の 幾何学的特徴づけ も存在する：

**Zariski ([Kollár-Mori，教科書，Lemma 2.45] も参照)**

有限生成体拡大 $K/k$ の離散附値 $\nu$ に対して，

幾何学的 $\iff$ $\exists$normal $k$-variety $Y$ with $k(Y) \simeq K$

s.t. $\nu$ は $Y$ の素因子に対応

こうした抽象的な定義だけでは，初めて見る方々には何だか訳がわからないと思われるので，unramified と幾何学的附値が現れる，最も非自明な例を述べよう．

## 教育的な例：$(K_{nr})_1\big(\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)\big) = \mathbb{C}^\times = K_1(\mathbb{C})$

- 体$k$に対して，$K_0(k) = \mathbb{Z}$, $K_1(k) = k^\times$であった．
- $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$の**rank1**幾何学的附値は，$\mathbb{P}^1$の各点に対応し，

  $t \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$における附値剰余体は

  $\kappa_t = \mathbb{C}[x]_{(x-t)}\big/(x-t) = \mathbb{C}$で，対応する

  $$\partial_t : \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^\times = K_1\big(\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)\big) \to K_0\big(\mathbb{C}\big) = \mathbb{Z}$$

  は，$f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^\times$ を$x = t$における ローラン級数展開

  $$f(x) = \underbrace{a_d}_{\neq 0}(x-t)^d + a_{d+1}(x-t)^{d+1} + \cdots$$

  で表したときの$d$である：$\partial_t(f) = d$. とくに，

$f \in \mathrm{Ker}\,\partial_t \iff \partial_t(f) = 0 \iff f$は$x = t$で零点でも極でもない．

- 各点$t \in \mathbb{P}^1$で非零点，非極な有理関数は定数関数なので，

  $$(K_{nr})_1\big(\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)\big) = \cap_{t\in\mathbb{P}^1} \mathrm{Ker}\,\partial_t = \mathbb{C}^\times = K_1(\mathbb{C}).$$

## 結局私は arXiv:2210.12225 で何をしたのか？

基礎体$k$が完全のとき，任意のproperとは限らないsmooth scheme の間の(有理)写像 $f : X - - > Y$ が，任意の SBNR sheaf （これは，motivic homotopy 群層を典型例に多くの例を持つ[Morel, $\mathbb{A}^1$-Algebraic Topology over a Field, SLNM 2052, 2012] で導入されたunramified sheaf から構成されるもので，unramified cohomologyもその例である）の対応を関手的に誘導することを示した：
$$f^* : S(Y) \to S(X).$$

証明の鍵となるのは，次の２つである：

- Morel, SLNM 2052 で示された，smooth scheme の間の(有理)写像 $f : X - - > Y$ が，任意のunramified shaf の対応を関手的に誘導すること．
- Zariskiのrank1幾何学的附値の幾何的特徴づけの，一般rankの場合の類似を頑張って示す．(論文の殆ど！)

斯くして叶った希望

$BG_{\mathbb{C}}$ : **retrct** $(-i)$ **rational**

$$\Longrightarrow \ H^j_{nr}(\mathbb{C}(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0, \ \forall j > i$$

を，Noether問題の階層的アップグレードに応用するためには，新潟大学の星明考氏による，次の２つの京都大学数理解析研究所講究録に出版されたサーベイ論文を眺めるとよい：[*]

[*]

– Noether's problem and rationality problem for multiplicative invariant fields: a survey, Algebraic number theory and related topics 2016, 29-53, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B77, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, (2020).
– Rationality problem for quasi-monomial actions, Algebraic number theory and related topics 2012, 203-227, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, (2014).

**My message! (問題は尽きない!!!)**

**In these referenes, whenever you encouter an example of $BG$ such that**

$$H^i_{ur}(\mathbb{C}(BG)/\mathbb{C}, A) \neq 0, \;\; i \in \mathbb{N},$$

**you can instantaneously upgrade the conclusion from merely "non retract rational" to "non retract $\big(-(i-1)\big)$-rational", and you are prompted to the next level question:**

$$\boxed{\textit{Is } BG \; (-i)\textit{-rational?}}$$

**So, don't leave the scene immediately simply because $BG$ is found to be non retract rational!**

**Schreieder's higher unramified cohomology と**

**integral Hodge conjecture の反例であることから従う，**

幾何学的条件

**記号の準備 Integral Hodge conjecture**

**For a complex projective algebraic manifold $X$, the integral Hodge conjecture asks the surjectivity of the cycle map :**

$$cycl^i : \mathrm{CH}^i(X) \overset{?}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hdg}^{2i}(X,\mathbb{Z}) := H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \cap H^{i,i}(X,\mathbb{C})$$

**In other words,**

$$\boxed{Z^{2i}(X)}$$

$$:= \mathrm{Coker}\Big(cycl^i : \mathrm{CH}^i(X) \to \mathrm{Hdg}^{2i}(X,\mathbb{Z}) := H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \cap H^{i,i}(X,\mathbb{C})\Big)$$

$$\overset{?}{=} 0$$

## WIHC - Weak Hodge Integral Conjecture -1

ここでは私は，次の予想により興味が有る:

**WIHC (Weak Hodge Integral Conjecture**

$$\boxed{Z^{2i}(X)\{tors\} \neq 0}$$

**Why do we restrict our attention to $\{tors\}$?**

**This is because:**

– **If the (usual rational) Hodge conjecture $HC^{2i}_{\mathbb{Q}}(X)$ holds, then**

$$Z^{2i}(X) = Z^{2i}(X)\{tors\} = Z^{2i}_{top}(X)\{tors\},$$

**where**

$$Z^{2i}_{top}(X) := \mathrm{Coker}\Big(\iota \circ cycl^i : \mathrm{CH}^i(X) \xrightarrow{cycl^i} \mathrm{Hdg}^{2i}(X, \mathbf{Z})$$
$$:= H^{2i}(X, \mathbf{Z}) \cap H^{i,i}(X, \mathbf{C}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} H^{2i}(X, \mathbf{Z})\Big)$$

## WIHC - Weak Integral Hodge Conjecture-2

– By the structure theorem of finite genrated abelian groups,

$$Z^{2i}(X)\{tors\} = Z^{2i}_{top}(X)\{tors\} = \oplus_{\ell:\text{prime}} \overbrace{Z^{2i}_{top}(X)\{\ell^\infty\}}^{\ell\text{-primary torsion part}},$$

where we may write

$$Z^{2i}(X)\{tors\} = Z^{2i}_{top}(X)\{\ell^\infty\} = \boxed{Z^{2i}_{et}(X)\{\ell^\infty\}},$$

using the étale cycle map :

$$cycl_{et} : \mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \;\to\; H^{2i}_{et}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)) := \varprojlim_n H^{2i}_{et}\left(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes i}\right)$$

$$Z^{2i}_{et}(X) := \mathrm{Coker}\, cycl_{et}.$$

## The cases $i = 1, 2$

- For $i = 1$, $Z^2(X) = 0$ by the so-called Lesfschtez $(1,1)$-theorem. ([Kodaira-Spencer, ProcNatAcad.Sci, U.S.A., 1953]).
- For $i = 2$, we have the following theorem:

[Colliot-Thélène-Voisin, DukeMJ, 2012, Th.3.7; Prop.3.3,Th

(i) For a complex projective algebraic manifold $X$, we have a short exact sequence:

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}(2)) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to Z^4(X)\{\textbf{tors}\} \to 0$$

(ii) 私の意味で $X$ が $\boxed{(-2)\ \text{rationally connected}}$ とすると $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}(2)) = 0$ となるので,

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \overset{\text{(i)}}{=} Z^4(X)\{\textbf{tors}\} \overset{\text{[Bloch–Srinivas,AJM,1983]}}{=} Z^4(X).$$

[Colliot-Thélène-Voisin, DukeMJ, 2012]の系
及び[Voisin, LNUMI 26, 2019, Lemma 1.14]

$Z^4(X)\{$**tors**$\}$ **is a stable birational invariant.**

**If** $Z^4(X)\{$**tors**$\} \neq 0$, **then** $X$ **is not a rational retract of a smooth projective** $Y$ **with trivial** $H^3_{nr}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. **In particular,**

$X$ **is not** $(-2)$ **retract rational.**

ここでの私の主定理は，これを任意の余次元$i$の場合に一般化します．それを述べるために，用語を準備します．

**For all of the definitions below, if** $c = 0$ **we shall usually omit "**$> c(= 0)$ **from their terminologies:**

(i) **Let us say a rational map $f : X - - > Y$ a** <u>codimension $> c$ rational map</u> **and denote it by**

$$f : X \overset{(>c)}{- - >} Y,$$

**if its indeterminacy locus $I_f \subset X$ has codimension larger than $c$ :**

$$\mathrm{codim}_X I_f > c.$$

(ii) **Let us say codimension $> c$ rational maps $f :$ $X - - > Y$, $g : X - - > Y$** <u>**codimension $> c$ equivalent**</u> **and denote this situation by**

$$f \overset{(>c)}{=} g,$$

**if there is a closed subscheme $I$ such that $I_f \cup I_g \subset I \subset X$ of codimension $> c$ :** $\mathrm{codim}_X I > c$, **such that**

$$f\big|_{X \setminus I} = g\big|_{X \setminus I}$$

(iii) **Let us say two equi-dimensional $k$-schemes $X, Y$ codimension $> c$ birational equivalent and denote this situation by**

$$X \overset{(>c)}{\approx} Y,$$

**if there are codimension $> c$ rational maps $f : X \overset{(>c)}{--} > Y$, $g : Y \overset{(>c)}{--} > X$ such that both $g \circ f$ and $f \circ g$ are also codimension $> c$ rational maps such that**

$$g \circ f \overset{(>c)}{=} Id_X, \qquad f \circ g \overset{(>c)}{=} Id_Y$$

(iv) **Let us say two equi-dimensional $k$-schemes $X, Y$ codimension $> c$ stably birational equivalent , if there exists some $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that**

$$\mathbb{A}^i \times X \overset{(>c)}{\approx} \mathbb{A}^i Y$$

(v) **Let us say $X$ is codimension $> c$ rational retract of $Y$, if there are codimension $> c$ rational maps $f : X \overset{(>c)}{- - >} Y$, $g : Y \overset{(>c)}{- - >} X$ such that $g \circ f$ is also a codimension $> c$ rational map such that**

$$g \circ f \overset{(>c)}{=} Id_X.$$

(vi) **Let us say a smooth proper $X$** $(-i)$ **codimension** $> c$ **rational** **, if there exists an $i$-dimensional smooth proper $Z^i$ such that**

$$X \overset{(>c)}{\approx} \mathbb{P}^{\dim X - i} \times Z^i.$$

(vii) **Let us say a smooth proper $X$** $(-i)$ **codimension** $> c$ **stable rational** **, if there exists some $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $\mathbb{P}^N \times X$ is $(-i)$ codimension $> c$ rational.**

(viii) **Let us say a smooth proper $X$** $(-i)$ **codimension** $> c$ **retract rational** **if there exist an $i$-dimensional smooth proper $Z^i$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq n}$, such that $X$ is codimension $> c$ rational retract of $\mathbb{P}^N \times Z^i$.**

## Double Hierarchy の出現！

(i) **We have the following impliations of double hierarchies:**

$$\{\ (-i)\ \textbf{codimension} > c\ \textbf{rational}\ \}_{i,c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

$$\Longrightarrow\ \{\ (-i)\ \textbf{codimension} > c\ \textbf{stable rational}\ \}_{i,c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

$$\Longrightarrow\ \{\ (-i)\ \textbf{codimension} > c\ \textbf{retract rational}\ \}_{i,c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}},$$

**which induces a web of implications induced by** $(-i) \Longrightarrow \big(-(i+1)\big)$ **and** $>(c+1) \Longrightarrow > c$.

(ii) **The cases** $i = 0$ **essentially correspond to the hierarchies considered yesterday, and reviewed at the begininng of today's lecture.**

# Schreieder's refined (higher) unramified cohomology - 1

For $X \in Sch_k$, consider the increasing filtration

$$F_0X \subset F_1X \subset \cdots \subset F_{\dim X}X = X,$$

by Pro-schemes

$$F_jX := \{x \in X \mid \mathrm{codim}(x) \leq j\}, \ \left(\mathrm{codim}(x) := \dim X - \dim(\overline{\{x\}})\right).$$

<u>ココロ:</u>

- $F_jX = X^{(\leq j)}$, $F_0X = \{$generic points of $X\}$.
- $F_jX \approx \varprojlim_{\substack{U \subset X, \text{ open subset} \\ \text{s.t. } \mathrm{codim}_X(X \setminus U) > j.}} U$
- Set $H^*(-,n) := H^*_{et}\left(-, \mu_{\ell^r}^{\otimes n}\right)$, $(1 \leq r \leq +\infty)$ then

$$H^*(F_jX, n) = \varinjlim_{\substack{U \subset X, \text{ open subset} \\ \text{s.t. } \mathrm{codim}_X(X \setminus U) > j.}} H^*(U, n)$$

- <u>coniveau filtration</u> on $H^i(X,n)$ is given by

$$N^jH^i(X,n) := \mathrm{Ker}\left(H^i(X,n) \to H^i\left(F_{j-1}X, n\right)\right).$$

**Then Schreieder defined**

**refined (寧ろhigherと言いたい) unramified cohomology**

$$\boxed{H^*_{j,nr}(X,n)} := \mathrm{Im}\left(H^*(F_{j+1}X,n) \to H^*(F_jX,n)\right),$$

**which enjoys:**

- $H^*_{0,nr}(X,n) = H^*_{nr}\left(X,\mu_{\ell^r}^{\otimes n}\right)$, **the usual unramified cohomology.**
- $H^i_{j,nr}(X,n) \subseteq H^i(F_jX,A(n))$, **which is** 0 **for all** $i > \dim X + j$.
- **refined (higher) unramified cohomology is** $\boxed{\text{“motivic”}}$**: w/ a Chow correspondences action:**

$$\mathrm{CH}^c(X\times Y)\times H^i_{j,nr}(X,n) \to H^{i+2c-2d_X}_{j+c-d_X,nr}(Y,n+c-d_X),$$
$$([\Gamma],[\alpha]) \mapsto [\Gamma]_*[\alpha]$$

## いよいよここでの主定理

**$Z^{2i}(X)\{\textbf{tors}\}$ is a codimension $> (i-2)$ stable birational invariant.**

**If the codimension $i$ weak integral Hodge conjecture does not hold for $X$, i.e.**

$$Z^{2i}(X)\{\textbf{tors}\} \neq 0,$$

**then $X$ is not a $(-i)$ codimension $> (i-2)$ retract rational of a smooth projective $Y$ with trivial $H^{2i-1}_{i-2,nr}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = 0$.**

**In particular,**

**$X$ is not $(-i)$ codimension $> (i-2)$ retract rational.**

## Speculation（今回最後のMessage!）

昨日考えたhierarchy（つまり，上のdouble hierarchy で $c=0$ の部分だけからは，古典的ホモトピー論のchromatic hierarchyに対応する部分とは，関係が見えそうにない．

しかしながら，double hierarchy でそれと直交する $c$ を動かして全体を眺めると，chromatic hierarchy　との関係の一端が現れてくる：(Totaro, JAMS 10 (1997)) cycle map $cycl$ のThom reduction 分解：

$$\begin{array}{ccccccccc} MU^*(X)\otimes_{MU^*} H^* & & & \longrightarrow & & & & & H^*(X,\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ MU^*(X) & \longrightarrow & BP^*(X) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & BP\langle n+1\rangle^*(X) & \longrightarrow & BP\langle n\rangle^*(X) & \longrightarrow \cdots & BP\langle 0\rangle^*(X) = H^*(X,\mathbb{Z})_{(l)} \end{array}$$

を注意深く眺めると，　$X$ の純ホモトピー論的でchromaticな条件から，$X$ の，我々の double hierarchy を用いて記述される，純代数幾何的な条件が従う，　ことが分かる．

これより，様々な motivic generalized cohomology の我々の double hierachy への応用の可能性が期待される．