“Lyubeznik numbers of Stanley-Reisner ideals, and more... (1) & (2)”

柳川浩二 (関西大学)

Part 1. R. Stanley は, n 頂点の単体的複体 Δ に, 多項式環 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ の被約単項式イデアル I_Δ を対応させることで, 単体的複体の組合せ論と可換環論を繋ぎ, 「単体的球面の上限予想」を解決した (1975 年)。剰余環 S/I_Δ は現在では **Stanley-Reisner 環**と呼ばれ, 活発な研究が続いている。筆者は 20 数年前, **squarefree 加群**やそれらがなす (導来) 圏を導入し, Stanley-Reisner 環の理論にホモロジカルな手法を組織的に適用する枠組みを提唱した。現在までに, 他の研究者によるものも含め, 様々な応用が見つかっている。

いったん Stanley-Reisner 環から離れるが, 多項式環 S の次数付イデアル I に対し, I を台とする S の局所コホモロジー $H^i_I(S)$ は, S-加群としては無限生成ながら, $\mathrm{char}(K) = 0$ の時は D-加群の構造, $\mathrm{char}(K) > 0$ の時も類似の構造を持ち, この文脈で「有限生成」となる。 さらに, $H^i_{I_\Delta}(S)$ の入射分解から **Lyubeznik 数**と呼ばれる不変量が定まり, 現代の可換代数の重要な研究対象の一つとなっている。

各 $x_i \in S = K[x_1, \ldots, x_n]$ の次数を 第 i-基本ベクトル $\mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^n$ とすると, Stanley-Reisner イデアル I_Δ は $\mathbb{Z}^n$-次数付イデアルとなる (前段で「次数付イデアル I」と言ったのは, $\deg x_i = 1$ 等とする $\mathbb{Z}$-次数であり, 遥かに一般的なもの)。筆者は [1, 2] で, この $\mathbb{Z}^n$-次数により, $H^i_{I_\Delta}(S)$ 自身やその Lyubeznik 数は比較的容易に記述できることを示した。squarefree 加群の応用例であり, 今回はその概略を紹介する。

Part 2. **単体的ポセット**は, 定義上は一定条件を満たす有限半順序集合 (ポセット) であるが, 実体はある種の有限正則 CW 複体であり, 有限単体的複体の一般化と言える。有限単体的複体 Δ から Stanley-Reisner 環 S/I_Δ が得られたように, 単体的ポセット P からも面環 (face ring) S/I_P が定義される。 単体的ポセットとその面環は, トーリック・トポロジーの研究に用いられるようだが, 本講演では (組合せ論的) 可換代数からのアプローチを扱う。

面環 S/I_P の (非自明な) 最も単純な例は $K[y_1, y_2, x, z]/(y_1 y_2 - x - z, xz)$ であるが, この場合, $\deg y_1 = (1, 0)$, $\deg y_2 = (0, 1)$, $\deg x = \deg z = (1, 1)$ として, I_P は $\mathbb{Z}^2$-次数付けを持つ。一般の場合も同様で, I_P はやや変則的な $\mathbb{Z}^n$-次数付けを持つ。現在, 筆者は柴田孝祐氏 (米子高専) と共同で, I_P を台とする局所コホモロジー $H^i_{I_P}(S)$ に, Stanley-Reisner イデアルの場合の上述の結果を一般化することを目指して研究中である。次数付けの複雑さから様々な困難が生じるが, 少しずつ結果が揃いつつあるので, 現状を紹介したい。

本講演を通じて, **双対化複体**が重要な役割を果たす。アクセスし易くかつ一般的な参考文献として (本講演と方向性がだいぶ異なるのであるが), [3] を挙げておく。

References

[1] J. Àlvarez Montaner and K. Yanagawa, Lyubeznik numbers of local rings and linear strands of graded ideals, Nagoya Math. J. **231** 23–54 (2018).

[2] K. Yanagawa, Bass numbers of local cohomology modules with supports in monomial ideals, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **131** 45–60 (2001).

[3] The Stacks Project Authors, Stacks Project (2014), available at `http://stacks.math.columbia.edu`.