はめ込みと $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

金城 就実 *

信州大学大学院理工学系研究科 修士課程 2 年

二つの多様体が与えられたとき，それらの間に埋め込み（はめ込み）が存在するかを判定すること，さらにそのような写像全体を分類することは，位相幾何学の中心的な話題のひとつである．多様体のはめ込みの正則ホモトピーによる分類問題は，Smale–Hirsch の理論（[5, 2]）によりホモトピー論に帰着した．特に，n 次元球面 S^n の N 次元空間 $\mathbb{R}^N$ へのはめ込みの場合，はめ込み $S^n \looparrowright \mathbb{R}^N$ 全体を正則ホモトピーによって分類した空間 $\mathrm{Imm}[S^n, \mathbb{R}^N]$ には連結和により群構造が入り，Stiefel 多様体 $V_{N,n}$ の n 次ホモトピー群 $\pi_n(V_{N,n})$ と同型となる．この同型によって与えられる $\pi_n(V_{N,n})$ の値をはめ込みの **Smale 不変量**と呼ぶ．

さて，$n = 3$, $N = 4$ の場合，Smale–Hirsch の定理により

$$\mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \pi_3(V_{4,3}) \cong \pi_3(SO_4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

である．つまり，$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ をはめ込みを用いて理解することができる（[3, 1]）．特に，Hughes [3] は “球面の裏返し” を用いて $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元を構成している．

今回の講演では，[3] で構成された $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元を紹介する．また，[4] で構成した Dynkin 図形に付随したはめ込み $S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の構成法とその Smale 不変量にいても述べたい．

参考文献

[1] T. Ekholm and M. Takase, Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions, *Bull. London Math. Soc.* **43** (2011) 251–266.

[2] M. W. Hirsch, Immersions of manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959) 242–276.

[3] J. Hughes, Bordism and regular homotopy of low-dimensional immersions, *Pacific J. Math.* **156** (1992) 155–184.

[4] S. Kinjo, Immersions of S^3 into $\mathbb{R}^4$ associated with Dynkin diagrams of types A and D, preprint, arXiv:1309.6526.

[5] S. Smale, The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, *Ann. of Math. (2)* **69** (1959) 327–344.

*skinjo@math.shinshu-u.ac.jp