擬スキーモイドとBaues–Wirschingコホモロジーについて

百瀬　康弘　(信州大学大学院 総合工学系研究科)*

本研究は沼田泰英氏 (信州大学) との共同研究に基づく結果である.

アソシエーションスキームという概念は代数的組合せ論における重要な研究対象である. 一方, アソシエーションスキームを小圏の表現論およびホモトピー論を用いて研究するために Kuribayashi–Matsuo [2] は (擬) スキーモイドという概念を与えた.

定義 1. 小圏 $\mathcal{C}$ と射全体の集合の分割 S との組 $(\mathcal{C}, S)$ が擬スキーモイドとは, S の元 σ, τ, μ と μ の元 f, g に対して集合として $P^f_{\sigma\tau} \cong P^g_{\sigma\tau}$ となるときをいう. 但し, S の元 σ, τ と $\mathcal{C}$ の射 f に対して $P^f_{\sigma\tau} = \{\, (u, v) \in \sigma \times \tau \mid u \circ v = f \,\}$ である.

擬スキーモイド $(\mathcal{C}, S)$ を研究する手段として, それから得られるスキーモイド代数と呼ばれる体 k 上の代数 $k(\mathcal{C}, S)$ 上の加群を調べることが挙げられる. 我々は左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群 M を調べるために Baues–Wirsching [1] によって導入されたある関手 D を係数に持つ小圏のコホモロジー $\mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D)$ を用いた. ここでは特に左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群 M によるある種の $(\mathcal{C}, S)$ の表現に当たる関手 $D_M : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ を用いた係数を考える.

定義 2. 擬スキーモイド $(\mathcal{C}, S)$ と左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群 M に対して, スキーモイドコホモロジー $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ を $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M) = \mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D_M \circ t)$ と定義する. 但し, t はターゲット関手と呼ばれる関手である.

$\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ は次で与えられる同値関係の不変量である.

$(\mathcal{C}, S)$ と $(\mathcal{E}, H)$ を擬スキーモイド, M を左 $k(\mathcal{C}, S)$-加群, N を左 $k(\mathcal{E}, H)$-加群とする.

定義 3. M と N が d-同値とは, $D_M \circ F$ と D_N が関手圏の導来圏 $\mathrm{D}(k\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathcal{E}})$ で同型となるような同値 $F : (\mathcal{E}, H) \to (\mathcal{C}, S)$ が存在するときをいう.

この d-同値によりスキーモイド代数上の加群を分類するために $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ の計算は重要である. 以降 $\mathcal{C}$ として poset P と同一視でき, クイバー Q によって自由生成された小圏のみを考える. このとき Baues–Wirsching コホモロジーには次の事実がある.

- 関手 $F : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ に対して, $\mathrm{H}^0_{BW}(\mathcal{C}, F \circ t) \cong \lim_{\mathcal{C}} F$ となる.
- 任意の $n \geq 2$ と係数 D に対して, $\mathrm{H}^n_{BW}(\mathcal{C}, D) = 0$ となる.

よって, この $\mathcal{C}$ に対してはあと 1 次のコホモロジーを計算することになる.

また, 後に $\mathrm{H}^n((\mathcal{C}, S); M)$ に適用するために圏代数 $k\mathcal{C}$ 上の加群 N に対して得られる関手 $\pi_{\mathcal{C}}(N) : \mathcal{C} \to k\text{-Mod}$ を用いた係数を考えた. ここで $\pi_{\mathcal{C}}$ とは, Mitchell 対応と呼ばれる $k\mathcal{C}\text{-Mod}$ から $k\text{-Mod}^{\mathcal{C}}$ への関手であり, $\mathcal{C}$ の対象が有限のとき $\pi_{\mathcal{C}}$ は圏の同値を与える.

講演では $\mathrm{H}^1_{BW}(\mathcal{C}, \pi_{\mathcal{C}}(N) \circ t)$ を Q の道を用いて記述したことを話したいと思う.

参考文献

[1] H. J. Baues and G. Wirsching, Cohomology of small categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 38(2-3):187–211, 1985.

[2] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories. to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). arXiv:1304.6883 math. CT.

* e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp