FFRT の局所環の基本類について

大田康介　(明治大学)

1965 年に Serre の重複度予想が提起された．この予想の中の一部は依然として未解決問題であり, Serre の positivity 予想と呼ばれている．small Mac 予想が正しければ, Serre の positivity 予想をはじめとする局所環論の様々な未解決問題が肯定的に解決される．

予想 0.1 (small Mac 予想) *任意の excellent Noether 局所環 R に対して, maximal Cohen-Macaulay R-module が存在する．*

特異リーマン・ロッホ理論によって, 同型写像 $\tau_R : G_0(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ が得られる．ここで, $G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ は有限生成 R-加群の Grothendieck 群であり,

$$G_0(R)_{\mathbb{Q}} := \frac{\displaystyle\bigoplus_{M:\text{有限生成 } R\text{-加群}} \mathbb{Q}[M]}{\langle [M]-[L]-[N] \mid 0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ は有限生成 } R\text{-加群の完全列} \rangle}$$

と表される。$A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ は R の Chow 群 である．$F_R := \tau_R^{-1}([\mathrm{Spec}R])$ を R の fundamental class と呼ぶ．$C_{\mathrm{CM}}(R) := \displaystyle\sum_{M \text{ は MCM}} \mathbb{R}_{\geq 0}[M]$ とおくとき, 環 R に対して small Mac 予想が正しいことと $F_R \in C_{\mathrm{CM}}(R)$ であることが同値であることが知られている．本講演では次の事実を説明させていただきたい．([1] では, $G_0(R)$ を数値的同値で割った $\overline{G_0(R)}$ を扱ったが, 本講演では $G_0(R)$ 自身について考察する．)

定理 0.2 $(R, \mathfrak{m})$ *を F-finite Cohen-Macaulay 局所整域で剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体なるものとする．このとき, R が FFRT ならば $F_R \in C_{\mathrm{CM}}(R)$ である．*

ここで, R が FFRT であるとは, R が Cohen-Macaulay 環であり, 有限個の直既約な maximal Cohen-Macaulay R-加群 $M_1, \ldots, M_s$ があって, 任意の自然数 $e > 0$ に対して,

$$F_*^e R = M_1^{a_{e1}} \oplus \cdots \oplus M_s^{a_{es}}$$

を満たすような非負整数 $a_{e1}, \ldots, a_{es} \in \mathbb{N}_0$ が存在することをいう．

参考文献

[1] Kazuhiko Kurano, “On the limit of Frobenius in the Grothendieck group”, 35th Comm. Alg., RIMS, Kyoto, Dec. 6, 2013